No.2　演習プリント　解答

名前（　　　　　　　　　　　　）

[センター]

(1)　$y=-x^3+9x^2+kx$ から　　$y'=-3x^2+18x+k$

よって，点 Q $(t,\ -t^3+9t^2+kt)$ における C の接線の方程式は

$$y-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(x-t)$$

これが点 P $(1,\ 0)$ を通るから　　$0-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(1-t)$

整理すると　　$-{}^{\text{ア}}2t^3+{}^{\text{イウ}}12t^2-{}^{\text{エオ}}18t=k$

$p(t)=-2t^3+12t^2-18t$ とおくと　　$p'(t)=-6t^2+24t-18=-6(t-1)(t-3)$

$p'(t)=0$ とすると　　$t=1,\ 3$

よって，関数 $p(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$p'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$p(t)$	↘	極小	↗	極大	↘

ゆえに，関数 $p(t)$ は

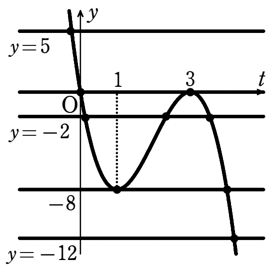
$t={}^{\text{カ}}1$ で極小値 $p(1)=-2\cdot1^3+12\cdot1^2-18\cdot1={}^{\text{キク}}-8$ をとり，

$t={}^{\text{ケ}}3$ で極大値 $p(3)=-2\cdot3^3+12\cdot3^2-18\cdot3={}^{\text{コ}}0$　　をとる。

ここで，点 P を通る C の接線の本数は，$y=p(t)$ のグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数に等しい。

ゆえに，接線の本数が 2 本となるための条件は，$y=p(t)$ のグラフと直線 $y=k$ が相異なる 2 つの共有点をもつことであり，このとき，右の図から

$k={}^{\text{サ}}0,\ {}^{\text{シス}}-8$



同様に考えて，右の図から，点 P を通る接線の本数は

$k=5$ のとき ${}^{\text{セ}}1$ 本，　$k=-2$ のとき ${}^{\text{ソ}}3$ 本，

$k=-12$ のとき ${}^{\text{タ}}1$ 本

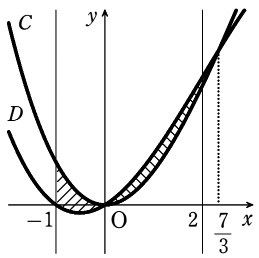
である。

(2)　$k=0$ のとき，C の方程式は　　$y=-x^3+9x^2$

C と D の共有点の x 座標を求めると，$-x^3+9x^2=-x^3+6x^2+7x$ から　$3x^2-7x=0$

すなわち　　$x(3x-7)=0$　　　よって　　$x={}^{\text{チ}}0,\ \dfrac{{}^{\text{ツ}}7}{{}^{\text{テ}}3}$

ゆえに，求める面積は，右の図の斜線部分の面積であり



$$\int_{-1}^{0}\{(-x^3+9x^2)-(-x^3+6x^2+7x)\}\,dx$$

$$+\int_{0}^{2}\{(-x^3+6x^2+7x)-(-x^3+9x^2)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(3x^2-7x)\,dx+\int_{0}^{2}(-3x^2+7x)\,dx$$

$$=\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=-\left\{(-1)^3-\frac{7}{2}\cdot(-1)^2\right\}+\left(-2^3+\frac{7}{2}\cdot2^2\right)=\frac{{}^{\text{トナ}}21}{{}^{\text{ニ}}2}$$

[センター]

(1)　$f(x)=x^3-px$ から　　$f'(x)={}^{\text{ア}}3x^{{}^{\text{イ}}2}-p$

$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$f'(a)=0$ すなわち $3a^2-p={}^{\text{ウ}}0$ が成り立つ。

$p\leqq0$ のとき，$f'(x)=3x^2-p\geqq0$ となり，$f(x)$ は常に増加し，極値をもたない。

$p>0$ のとき，a の 2 次方程式

$3a^2-p=0$ は異なる 2 つの実数解

$a=\pm\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ をもち，右の増減表から

$f(x)$ は $x=\pm\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ で極値をもつ。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{p}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{p}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$f(x)$ が極値をもつための p の条件は　　$p>0$　　(${}^{\text{エ}}$①)

(2)　$f(x)$ は $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとるから　　$f'\left(\dfrac{p}{3}\right)=0$

よって　　$3\left(\dfrac{p}{3}\right)^2-p=0$　　ゆえに　　$p(p-3)=0$

(1) より $p>0$ であるから　　$p={}^{\text{オ}}3$

このとき　　$f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$f(x)$ は $x={}^{\text{カキ}}-1$ で極大値をとり，$x={}^{\text{ク}}1$ で極小値をとる。

ℓ は点 $(b,\ f(b))$ における C の接線であるから，その方程式は

$$y=({}^{\text{ケ}}3b^2-{}^{\text{コ}}3)(x-b)+f(b)$$

また，ℓ は点 A $(1,\ -2)$ を通るから

$$-2=(3b^2-3)(1-b)+(b^3-3b)\qquad\text{すなわち}\qquad {}^{\text{サ}}2b^3-{}^{\text{シ}}3b^2+1=0$$

左辺を因数分解すると　　$(b-1)^2(2b+1)=0$　　ゆえに　　$b={}^{\text{ス}}1,\ \dfrac{{}^{\text{セソ}}-1}{{}^{\text{タ}}2}$

$b=1$ のとき，ℓ の傾きは $f'(1)=0$ となり不適。

$b=-\dfrac{1}{2}$ のとき，ℓ の傾きは $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-3=-\dfrac{9}{4}$ となり適する。

したがって，ℓ の方程式は

$$y=-\frac{9}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{11}{8}\qquad\text{すなわち}\qquad y=\frac{{}^{\text{チツ}}-9}{{}^{\text{テ}}4}x+\frac{{}^{\text{ト}}1}{{}^{\text{ナ}}4}$$

D は点 A $(1,\ -2)$ を頂点とするから，その方程式は $y=c(x-1)^2-2$ とおける。

これが原点を通るから　　$0=c(-1)^2-2$　　ゆえに　　$c=2$

よって，D の方程式は　　$y=2(x-1)^2-2$　　すなわち　　$y={}^{\text{ニ}}2x^2-{}^{\text{ヌ}}4x$

したがって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1\left\{-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}-(2x^2-4x)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(-2x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4}=\frac{{}^{\text{ネノ}}11}{24}$$