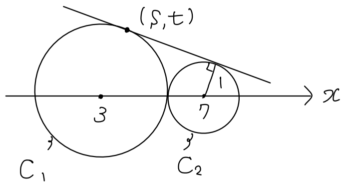
S③ １２番 (3)の別解

12　(3)の途中からの別解



(解1)（$a=7$が求まった後から）

C_1：$(x-3)^2+y^2=9$

C_2：$(x-7)^2+y^2=1$

円C_1上の点(s,t)における接線は、

$(s-3)(x-3)+ty=9$ …(＊)

これが円C_2に接するとき

$$\frac{|4(s-3)-9|}{\sqrt{(s-3)^2+t^2}}=1 \quad \cdots ①$$

$\therefore |4s-21|=\sqrt{(s-3)^2+t^2}$

点(s,t)は、円C_1上の点より、

$(s-3)^2+t^2=9$ …②

よって、①は $|4s-21|=3$

$\therefore 4s-21=\pm 3$

$\therefore s=6,\ \frac{9}{2}$

よって、②より、

$(s,t)=(6,0),\ \left(\frac{9}{2},\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

したがって、求める共通接線は(＊)より、

$x=6,\ x\pm\sqrt{3}y=9$ //

(解2)（$a=7$が求まった後から）

このとき、2円C_1とC_2の接点は$(6,0)$であり、

この点における共通接線は$x=6$である。

l：$y=mx+n$とする

lは、$mx-y+n=0$であり、lが

円C_1, C_2に接するとき、

$$\frac{|3m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=3 \cdots ①,\quad \frac{|7m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \cdots ②$$

①, ②より、

$|3m+n|=3|7m+n|$

☆x, yが実数のとき、$|x|=|y| \Leftrightarrow x=\pm y$

(i) $3m+n=3(7m+n)$のとき、

$n=-9m$

②より、 $|-2m|=\sqrt{m^2+1}$

$\therefore 4m^2=m^2+1$

$\therefore m^2=\frac{1}{3}$

よって

$(m,n)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-3\sqrt{3}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},3\sqrt{3}\right)$

(ii) $-(3m+n)=3(7m+n)$のとき、

$n=-6m$

②より、 $|m|=\sqrt{m^2+1}$

$\therefore m^2=m^2+1$

$1=0$となり、不適

以上より、求める共通接線は、

$x=6,\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-3\sqrt{3},\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+3\sqrt{3}$ //