◎ 3倍角の公式の導出

(ポイント)

1. $3\theta = 2\theta + \theta$ と分解する
2. $\sin 3\theta$ は、$\sin\theta$ のみで表せ、$\cos 3\theta$ は $\cos\theta$ のみで表せる。

(証明)

$$
\begin{aligned}
&\sin 3\theta \\
&= \sin(2\theta+\theta) \\
&= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta \\
&= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta \\
&= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$
\begin{aligned}
&\cos 3\theta \\
&= \cos(2\theta+\theta) \\
&= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ▨

☆ 3倍角の公式

サンシャイン　引いて　夜風(よ)　身

1. $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(サンシャイン引いて、夜風が身にしみる)

2. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(洋子さん参上、舞さん来ず)

$\boxed{6-2}$ (2)の別解

$2\sin\theta + \sin 2\theta + 2\sin 3\theta - 2\sin 2\theta\cos\theta > 0$

$2\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) - 4\sin\theta\cos^2\theta > 0$

$0<\theta<\pi$ より、両辺 $2\sin\theta\,(>0)$ で割ると、

$1 + \cos\theta + 3 - 4\sin^2\theta - 2\cos^2\theta > 0$

$4(1-\sin^2\theta) - 2\cos^2\theta + \cos\theta > 0$

$2\cos^2\theta + \cos\theta > 0$

$\cos\theta(2\cos\theta + 1) > 0$

$\cos\theta < -\frac{1}{2},\ 0 < \cos\theta$

$0<\theta<\pi$ より、

$0<\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi<\theta<\pi$