マーク演習　No.3　解答

1．$C: y=\dfrac{9}{4}x^2+ax+b$ が2点 $(0, 4)$ と $(2, k)$ を通るから

$4=b,\ k=\dfrac{9}{4}\cdot 2^2+a\cdot 2+b=2a+13$　ゆえに　$a=\dfrac{k-{}^{\text{アイ}}13}{{}^{\text{ウ}}2},\ b={}^{\text{エ}}4$

よって　$C: y=\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{k-13}{2}x+4$

(1)　$\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{k-13}{2}x+4=\dfrac{9}{4}\left(x+\dfrac{k-13}{9}\right)^2-\dfrac{(k-13)^2}{36}+4$ であるから，

C が x 軸と接するとき　$-\dfrac{(k-13)^2}{36}+4=0$ から　$k-13=\pm 12$

ゆえに　$k={}^{\text{オ}}1, {}^{\text{カキ}}25$

また，接点の x 座標は　$-\dfrac{k-13}{9}$ であるから

$k=1$ のとき $\dfrac{{}^{\text{ク}}4}{{}^{\text{ケ}}3}$，$k=25$ のとき $\dfrac{{}^{\text{コサ}}-4}{{}^{\text{シ}}3}$

(2)　$\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{k-13}{2}x+4=0$ とすると　$9x^2+2(k-13)x+16=0$

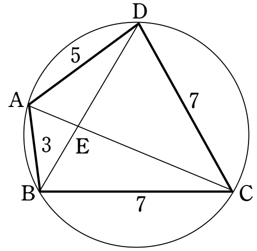
ゆえに　$x=\dfrac{-(k-13)\pm\sqrt{(k-13)^2-9\cdot 16}}{9}=\dfrac{-(k-13)\pm\sqrt{k^2-26k+25}}{9}$

条件から　$\dfrac{-(k-13)+\sqrt{k^2-26k+25}}{9}-\dfrac{-(k-13)-\sqrt{k^2-26k+25}}{9}\geqq 2$

よって　$\sqrt{k^2-26k+25}\geqq 9$　　ゆえに　$k^2-26k-56\geqq 0$ から　$(k+2)(k-28)\geqq 0$

ゆえに　$k\leqq{}^{\text{スセ}}-2,\ {}^{\text{ソタ}}28\leqq k$

2．(1)　$\angle A=\theta$ とおくと　$\angle C=180^\circ-\theta$



よって，余弦定理により

$\mathrm{BD}^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos\theta$,

$\mathrm{BD}^2=7^2+7^2-2\cdot 7\cdot 7\cos(180^\circ-\theta)$

ゆえに　$34-30\cos\theta=98+98\cos\theta$

よって　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

ゆえに　$\angle A={}^{\text{アイウ}}120^\circ$

よって　$\mathrm{BD}=\sqrt{34-30\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)}={}^{\text{エ}}7$

同様にして　$\mathrm{AC}^2=3^2+7^2-2\cdot 3\cdot 7\cos\angle B$,

$\mathrm{AC}^2=5^2+7^2-2\cdot 5\cdot 7\cos(180^\circ-\angle B)$

ゆえに　$58-42\cos\angle B=74+70\cos\angle B$ から　$\cos\angle B=-\dfrac{1}{7}$

よって　$\mathrm{AC}=\sqrt{58-42\cdot\left(-\dfrac{1}{7}\right)}={}^{\text{オ}}8$

[$\boxed{\text{別解}}$　トレミーの定理により　$7\cdot\mathrm{AC}=3\cdot 7+5\cdot 7$　　ゆえに　$\mathrm{AC}=8$]

また，$\angle C=60^\circ$ であるから

(四角形 ABCD)$=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\sin 120^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 7\sin 60^\circ={}^{\text{カキ}}16\sqrt{{}^{\text{ク}}3}$

(2)　$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とすると、$\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-\theta$ である。

よって、$\dfrac{\triangle\mathrm{ABC}}{\triangle\mathrm{ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\theta}{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}\sin(180^\circ-\theta)}=\dfrac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\dfrac{{}^{\text{ケ}}3}{{}^{\text{コ}}5}$

$\mathrm{BE}:\mathrm{ED}=\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ADC}={}^{\text{サ}}3:{}^{\text{シ}}5$

また、四角形 ABCD の面積について　$\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\sin\angle\mathrm{AEB}=16\sqrt{3}$

ゆえに　$\sin\angle\mathrm{AEB}=\dfrac{{}^{\text{ス}}4\sqrt{{}^{\text{セ}}3}}{{}^{\text{ソ}}7}$