積分演習プリント　　解答

1．［長崎大］

(ア) から　$f(x)=\int(x^2+ax)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+C$　(C は積分定数)

これと (イ) から　$C=-1$

よって　$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-1$

$f'(x)=x(x+a)$ で，$-a<0$ であるから，
$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{a^3}{6}-1$	↘	-1	↗

よって，$f(x)$ の極大値は $\frac{a^3}{6}-1$，
極小値は -1 である。

(ウ) から　$\frac{a^3}{6}-1-(-1)=\frac{4}{81}$

よって　$a^3=\frac{8}{27}$　　$a>0$ であるから　$a=\frac{2}{3}$

したがって　$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2-1$

2．［(1) 神奈川大　(2) 慶應義塾大］

(1)　両辺を x で微分すると　$f(x)={}^{ア}4x-4$

また，与えられた等式で $x=3$ とおくと　$0=2\cdot3^2-4\cdot3+k$　よって　$k={}^{イ}-6$

(2)　$\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)dt=k$ とおくと　$f(x)=2x^2+3x+k$

ゆえに　$\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)dt=\int_0^{\frac{1}{2}}(2t^2+3t+k)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+kt\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{11}{24}+\frac{k}{2}$

よって　$\frac{11}{24}+\frac{k}{2}=k$　　ゆえに　$k=\frac{11}{12}$

よって　$f(x)=2x^2+3x+\frac{11}{12}$

3．［同志社大］

$\int_{-1}^{x}f(t)dt=2x^2-ax+a$　……①　とする。

① で $x=-1$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=2+2a$

よって　$a={}^{ア}-1$

また，① の両辺を x で微分すると

$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}f(t)dt=4x-a=4x+1$

ゆえに　$f(x)=4x+1$

$-1\leqq x\leqq-\frac{1}{4}$ のとき　$|f(x)|=-f(x)$

$-\frac{1}{4}\leqq x\leqq1$ のとき　$|f(x)|=f(x)$

であるから

$\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\int_{-1}^{-\frac{1}{4}}\{-(4x+1)\}dx+\int_{-\frac{1}{4}}^{1}(4x+1)dx$

$=\left[-2x^2-x\right]_{-1}^{-\frac{1}{4}}+\left[2x^2+x\right]_{-\frac{1}{4}}^{1}$

$={}^{イ}\frac{17}{4}$

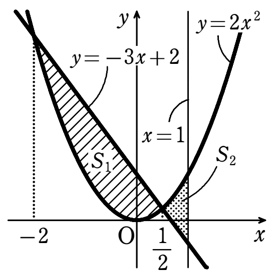
4．［名城大］

放物線 C と直線 ℓ_1 の交点の x 座標は，

$2x^2=-3x+2$　すなわち　$2x^2+3x-2=0$

を解くと $(x+2)(2x-1)=0$ から　$x=-2,\ \frac{1}{2}$

よって，右の図から，求める面積はそれぞれ



$S_1=\int_{-2}^{\frac{1}{2}}\{(-3x+2)-2x^2\}dx$

$=-2\int_{-2}^{\frac{1}{2}}(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$

$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left\{\frac{1}{2}-(-2)\right\}^3={}^{ア}\frac{125}{24}$

$S_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{2x^2-(-3x+2)\}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2+3x-2)dx$

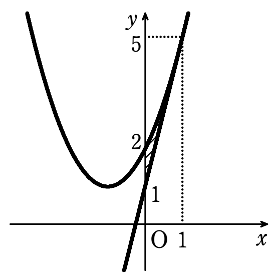
$=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}={}^{イ}\frac{17}{24}$

5．［職業能力開発総合大学校］

$f(1)=5$，$f'(x)=2x+2$ であるから，点 $(1,\ f(1))$
における接線の方程式は　$y-5=4(x-1)$

すなわち　$y={}^{ア}4x+{}^{イ}1$

求める面積を S とすると



$S=\int_0^1\{x^2+2x+2-(4x+1)\}dx$

$=\int_0^1(x^2-2x+1)dx=\int_0^1(x-1)^2dx$

$=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1={}^{ウ}\frac{1}{3}$

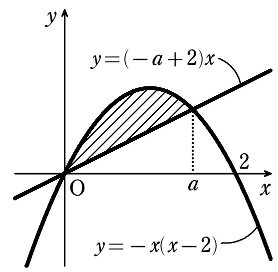
6．［小樽商科大］

$y=-x(x-2)$ と $y=(-a+2)x$ の交点の x 座標は

$-x(x-2)=(-a+2)x$　すなわち　$x^2-ax=0$

を解いて　$x=0,\ a$

曲線 $y=-x(x-2)$ と x 軸で囲まれた面積は



$\int_0^2\{-x(x-2)\}dx=\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$

よって，条件から

$\int_0^a\{-x(x-2)-(-a+2)x\}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}$

(左辺)$=\int_0^a\{-x(x-a)\}dx=\frac{1}{6}(a-0)^3=\frac{a^3}{6}$

よって　$\frac{a^3}{6}=\frac{2}{3}$

すなわち　$a^3=4$

a は実数であるから　$a=\sqrt[3]{4}$

7．［福岡大］

(1)　C_1 上の点 $(a,\ (a-1)^2)$ における接線の方程式は，$y'=2(x-1)$ から

$y-(a-1)^2=2(a-1)(x-a)$　　すなわち　$y=2(a-1)x-a^2+1$　……①

C_2 上の点 $(b,\ b^2-6b+5)$ における接線の方程式は，$y'=2x-6$ から

$y-(b^2-6b+5)=(2b-6)(x-b)$　すなわち　$y=2(b-3)x-b^2+5$　……②

直線 ℓ は ① と ② が一致する場合であるから

$\begin{cases}2(a-1)=2(b-3) & \cdots\cdots③\\ -a^2+1=-b^2+5 & \cdots\cdots④\end{cases}$

③ から　$b=a+2$　……⑤

これを ④ に代入して　$-a^2+1=-(a+2)^2+5$　　これを解いて　$a=0$

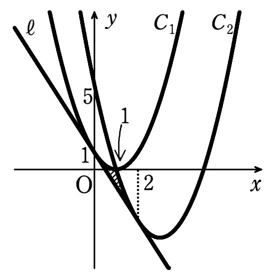
このとき，⑤ から　$b=2$

よって，直線 ℓ の方程式は　$y=-2x+1$

(2)　C_1 と C_2 の交点の x 座標は，$(x-1)^2=x^2-6x+5$

を解くと　$x=1$

よって，求める面積を S とすると



$S=\int_0^1\{(x-1)^2-(-2x+1)\}dx$

$+\int_1^2\{x^2-6x+5-(-2x+1)\}dx$

$=\int_0^1x^2dx+\int_1^2(x-2)^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2$

$=\frac{2}{3}$

8．［室蘭工業大］

(1)　$f(x)=x^3+ax+b$ から　　$f'(x)=3x^2+a$

$f(-2)=-1$ から　　$-8-2a+b=-1$　　　$f'(-2)=9$ から　　$12+a=9$

これを解いて　　$a=-3$，$b=1$

(2)　(1) から　　$f(x)=x^3-3x+1$，$f'(x)=3x^2-3$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 A $(-2,\ -1)$ における接線 ℓ の方程式は

$y-(-1)=9\{x-(-2)\}$　　　すなわち　　$y=9x+17$

ゆえに，点 A を通らない ℓ に平行な $y=f(x)$ の接線 m の傾きは 9 である。

曲線 $y=f(x)$ と直線 m の接点の x 座標を t $(t\neq -2)$ とすると　　$f'(t)=9$

すなわち　　$3t^2-3=9$　　　ゆえに　　$t^2=4$

$t\neq -2$ から　　$t=2$

このとき　　$f(2)=3$

よって，直線 m の方程式は　　$y-3=9(x-2)$　　　すなわち　　$y=9x-15$

したがって，直線 ℓ の方程式は　　$y=9x+17$

直線 m の方程式は　　$y=9x-15$

(3)　直線 m と曲線 $y=f(x)$ の共有点の x 座標は，次の方程式の実数解である。

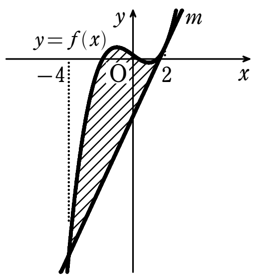
$x^3-3x+1=9x-15$

すなわち　　$x^3-12x+16=0$

よって　　$(x-2)^2(x+4)=0$

ゆえに　　$x=2,\ -4$

したがって，求める面積は



$$\int_{-4}^{2}\{(x^3-3x+1)-(9x-15)\}dx$$

$$=\int_{-4}^{2}(x^3-12x+16)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-6x^2+16x\right]_{-4}^{2}$$

$$=\frac{1}{4}\{2^4-(-4)^4\}-6\{2^2-(-4)^2\}+16\{2-(-4)\}=108$$

参考　（後半）　$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ が成り立つ。これを利用すると，面積は

$$\int_{-4}^{2}\{(x^3-3x+1)-(9x-15)\}dx=\int_{-4}^{2}(x+4)(x-2)^2dx=\frac{1}{12}\cdot 6^4=108$$

9．［神戸学院大］

(1)　$|x^2-2x|=0$ とすると　　$x(x-2)=0$　　　よって　　$x=$ ア0，イ2

(2)　$-1\leqq x\leqq 0$ のとき　$|x^2-2x|=x^2-2x$ であるから

$$\int_{-1}^{0}|x^2-2x|dx=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{ウ4}{エ3}$$

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x^2-2x|=-(x^2-2x)$

$2\leqq x\leqq 3$ のとき　$|x^2-2x|=x^2-2x$

であるから

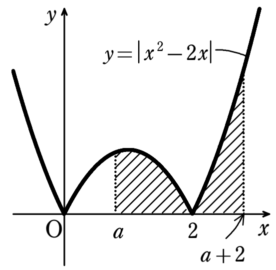
$$\int_0^3|x^2-2x|dx=\int_0^2\{-(x^2-2x)\}dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3=\frac{オ8}{カ3}$$

(4)　$a\leqq x\leqq 2$ のとき　　$|x^2-2x|=-(x^2-2x)$

$2\leqq x\leqq a+2$ のとき　$|x^2-2x|=x^2-2x$

であるから



$$\int_a^{a+2}|x^2-2x|dx$$

$$=\int_a^2\{-(x^2-2x)\}dx+\int_2^{a+2}(x^2-2x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_a^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^{a+2}=\frac{キ2}{ク3}a^3+\frac{ケ4}{コ3}$$

10．［京都大］

直線の方程式は　$y=a(x-1)+2$

これと $y=x^2$ から y を消去して

$x^2-ax+a-2=0$

この方程式の解を $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=a-2$ であるから

$$S(a)=\int_\alpha^\beta(ax-a+2-x^2)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{a^2-4(a-2)\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(a-2)^2+4\}^{\frac{3}{2}}$$

$0\leqq a\leqq 6$ であるから，$S(a)$ は $a=2$ で最小となる。

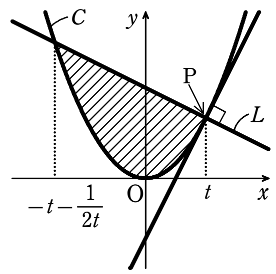
11．［学習院大］

(1)　$y=x^2$ から　　$y'=2x$

点 P における C の接線の傾きは $2t$ であるから，直線 L の方程式は

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)\qquad すなわち\qquad y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$$

(2)　C と L の方程式から y を消去すると



$$x^2=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$$

$$x^2+\frac{1}{2t}x-t\left(t+\frac{1}{2t}\right)=0$$

ゆえに　　$(x-t)\left(x+t+\dfrac{1}{2t}\right)=0$

よって　　$x=t,\ -t-\dfrac{1}{2t}$

$t>0$ より，$t>-t-\dfrac{1}{2t}$ であるから，面積 S は

$$S=\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}\left(-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}-x^2\right)dx=-\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}(x-t)\left(x+t+\frac{1}{2t}\right)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\left(t+t+\frac{1}{2t}\right)^3=\frac{1}{6}\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^3$$

$t>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により　　$2t+\dfrac{1}{2t}\geqq 2\sqrt{2t\cdot\dfrac{1}{2t}}=2$

等号が成り立つのは，$2t=\dfrac{1}{2t}$ すなわち $t^2=\dfrac{1}{4}$ かつ $t>0$ から，$t=\dfrac{1}{2}$ のときである。

したがって，S は　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{6}\cdot 2^3=\dfrac{4}{3}$ をとる。

12．［福岡大］

(1)　$y=\dfrac{1}{2}ax^2$ から　　$y'=ax$

よって，点 P$(2,\ 2a)$ における接線の傾きは　$2a$

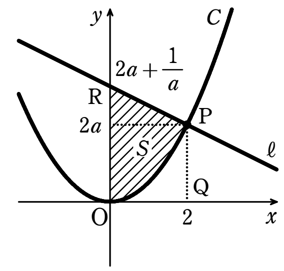
ゆえに，直線 ℓ の傾きは $-\dfrac{1}{2a}$ であるから，その方程式は

$$y-2a=-\frac{1}{2a}(x-2)\qquad すなわち\qquad y=-\frac{1}{2a}x+2a+\frac{1}{a}$$

$x=0$ を代入すると　　$y=2a+\dfrac{1}{a}$

したがって，直線 ℓ の y 切片は　　$2a+\dfrac{1}{a}$

(2)　Q$(2,\ 0)$，R$\left(0,\ 2a+\dfrac{1}{a}\right)$ とすると



$$S=(台形\ \mathrm{OQPR})-\int_0^2\frac{1}{2}ax^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2a+\left(2a+\frac{1}{a}\right)\right\}\cdot 2-\left[\frac{1}{6}ax^3\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}a+\frac{1}{a}$$

$a>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$S=\frac{8}{3}a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{8}{3}a\cdot\frac{1}{a}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

等号が成り立つのは，$\dfrac{8}{3}a=\dfrac{1}{a}$ のときである。

$\dfrac{8}{3}a=\dfrac{1}{a}$ から　　$a^2=\dfrac{3}{8}$　　　$a>0$ であるから　　$a=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

したがって，S は $a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ で最小値 $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ をとる。

積分演習プリント　　解答

13．［高知大］

(1)　$\mathrm{P}\left(3,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，求める円の中心を Q とする。

放物線 C は y 軸に関して対称であるから，点 Q は y 軸上にある。

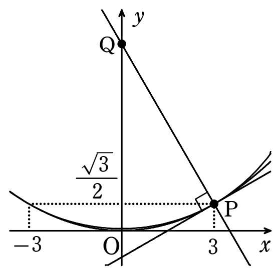
$y=\frac{1}{6\sqrt{3}}x^2$ から　$y'=\frac{1}{3\sqrt{3}}x$

よって，点 P における放物線 C の接線の傾きは

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot 3=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

直線 PQ は，点 P における放物線 C の接線に垂直であるから，その方程式は

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}(x-3)$$



すなわち　$y=-\sqrt{3}x+\frac{7\sqrt{3}}{2}$　……①

点 Q の y 座標は，直線 ① の y 切片であるから　$\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$

このとき　$\mathrm{PQ}^2=(0-3)^2+\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=36$

したがって，求める円の方程式は　$x^2+\left(y-\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2=36$

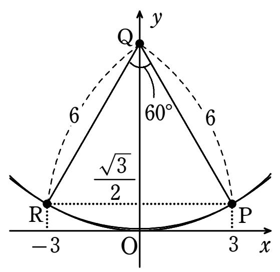
(2)　$\mathrm{R}\left(-3,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とする。

右の図より $\angle\mathrm{PQR}=60^\circ$ であるから，求める面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_{-3}^{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6\sqrt{3}}x^2\right)dx+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ-6\cdot 6\cdot\pi\cdot\frac{1}{6}$$

$$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{18\sqrt{3}}x^3\right]_0^3+9\sqrt{3}-6\pi$$

$$=11\sqrt{3}-6\pi$$



(3)　求める円の中心を $(a,\ b)$ とすると，半径は $|a|$ であるから，方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2\quad\cdots\cdots②$$

また，(1) と同様に点 $(a,\ b)$ は直線 ① 上にあるから　$b=-\sqrt{3}a+\frac{7\sqrt{3}}{2}$　……③

②，③ から　$(x-a)^2+\left(y+\sqrt{3}a-\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2=a^2$　……④

求める円は点 $\left(3,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通るから，④ より

$$(3-a)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}a-\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2=a^2$$

展開して整理すると　$a^2-8a+12=0$

よって　$(a-2)(a-6)=0$　　ゆえに　$a=2,\ 6$

したがって，求める円の方程式は，④ より

$a=2$ のとき　$(x-2)^2+\left(y-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=4$

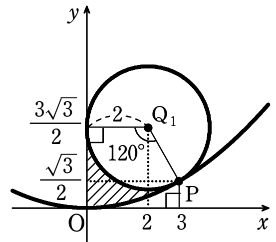
$a=6$ のとき　$(x-6)^2+\left(y+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=36$

(4)　[1]　円の方程式が $(x-2)^2+\left(y-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=4$ のとき円の中心を Q_1 とすると，求める面積は右の図の斜線部分の面積である。

したがって，求める面積を S_2 とすると

$$S_2=2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(3-2)\cdot\frac{1}{2}-\int_0^3\frac{1}{6\sqrt{3}}x^2dx-2\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{3}$$

$$=3\sqrt{3}+\sqrt{3}-\left[\frac{1}{18\sqrt{3}}x^3\right]_0^3-\frac{4}{3}\pi=\frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{3}\pi$$

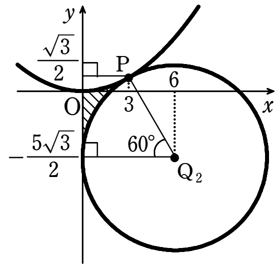


[2]　円の方程式が $(x-6)^2+\left(y+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=36$ のとき円の中心を Q_2 とすると，求める面積は右の図の斜線部分の面積である。

したがって，求める面積を S_3 とすると

$$S_3=(3+6)\cdot\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{2}-\int_0^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6\sqrt{3}}x^2\right)dx-6\cdot 6\cdot\pi\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{27\sqrt{3}}{2}-\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{18\sqrt{3}}x^3\right]_0^3-6\pi=\frac{25\sqrt{3}}{2}-6\pi$$



14．［東京電機大］

$x\leqq -2,\ 2\leqq x$ のとき　$|x^2-4|=x^2-4$，

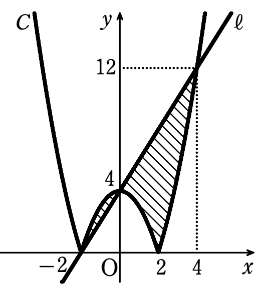
$-2\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x^2-4|=-(x^2-4)=-x^2+4$

曲線 C と直線 ℓ は右の図のようになり，それらの交点の x 座標は，方程式 $|x^2-4|=2x+4$ の解である。

これを解くと　$x=-2,\ 0,\ 4$

よって，求める面積の和は

$$\int_{-2}^{0}\{(-x^2+4)-(2x+4)\}dx+\int_0^2\{(2x+4)-(-x^2+4)\}dx+\int_2^4\{(2x+4)-(x^2-4)\}dx$$



$$=\int_{-2}^{0}(-x^2-2x)dx+\int_0^2(x^2+2x)dx+\int_2^4(-x^2+2x+8)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_2^4$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-4\right)+\left(\frac{8}{3}+4\right)+\left(-\frac{64}{3}+16+32\right)-\left(-\frac{8}{3}+4+16\right)$$

$$=\frac{52}{3}$$

コメント：15 (2)のように、$\frac{1}{6}$ 公式のみで求まる面積パズルも身に着けましょう。

15．［関西学院大］

(1)　曲線 C：$y=|2x(x-2)|$ について，

$x\leqq 0,\ 2\leqq x$ のとき　$y=2x(x-2)$

$0<x<2$　のとき　$y=-2x(x-2)$

$2x(x-2)=mx$ を解くと　$x=0,\ 2+\frac{m}{2}$

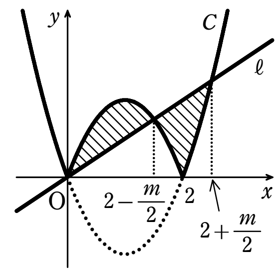
$-2x(x-2)=mx$ を解くと　$x=0,\ 2-\frac{m}{2}$

C と ℓ の共有点が 3 個となるための条件は

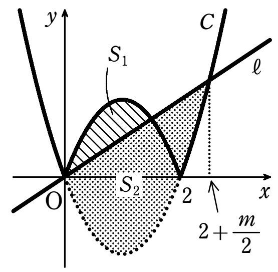
$$0<2-\frac{m}{2}<2\ \text{かつ}\ 2<2+\frac{m}{2}$$

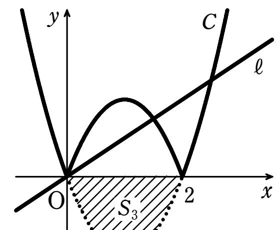
よって　$0<m<4$ かつ $0<m$

したがって　$0<m<4$



(2)　面積 S_1，S_2，S_3 を下の図のように定めると　$S=2S_1+S_2-2S_3$





ここで　$S_1=\int_0^{2-\frac{m}{2}}\{-2x(x-2)-mx\}dx=-2\left\{-\frac{1}{6}\left(2-\frac{m}{2}\right)^3\right\}=\frac{1}{3}\left(2-\frac{m}{2}\right)^3$

$S_2=\int_0^{2+\frac{m}{2}}\{mx-2x(x-2)\}dx=-2\left\{-\frac{1}{6}\left(2+\frac{m}{2}\right)^3\right\}=\frac{1}{3}\left(2+\frac{m}{2}\right)^3$

$S_3=-\int_0^2 2x(x-2)dx=-2\left(-\frac{1}{6}\cdot 2^3\right)=\frac{8}{3}$

よって　$S=2\cdot\frac{1}{3}\left(2-\frac{m}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(2+\frac{m}{2}\right)^3-2\cdot\frac{8}{3}$

$$=-\frac{1}{24}m^3+\frac{3}{2}m^2-2m+\frac{8}{3}$$

(3)　$\frac{dS}{dm}=-\frac{1}{8}m^2+3m-2=-\frac{1}{8}(m^2-24m+16)$

$\frac{dS}{dm}=0$ とすると　$m=12\pm 8\sqrt{2}$

$0<m<4$ における S の増減表は右のようになる。

よって，S を最小にする m の値は

$$m=12-8\sqrt{2}$$

m	0	$\cdots$	$12-8\sqrt{2}$	$\cdots$	4
$\frac{dS}{dm}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	