No.7　演習プリント　　解答　　　　　　　　名前（　　　　　　　）

1． (1)　ユークリッドの互除法により

$$197=92\cdot 2+13$$
$$92=13\cdot 7+1$$

よって　$1=92-13\cdot 7=92-(197-92\cdot 2)\cdot 7=92\cdot 15+197\cdot(-7)$

$92x+197y=1$ から $92\cdot 15+197\cdot(-7)=1$ ……① を引くと

$92(x-15)+197(y+7)=0$　　すなわち　$92(x-15)=-197(y+7)$

92 と 197 は互いに素であるから，$92x+197y=1$ の整数解は，n を整数として

$$x=197n+15,\quad y=-92n-7$$

$n=0$ のとき，x の絶対値は最小となる。

このとき　$x=$[アイ]15，$y=$[ウエ]-7

また，① の両辺を 10 倍して　$92\cdot 150+197\cdot(-70)=10$

$92x+197y=10$ からこれを引くと　$92(x-150)+197(y+70)=0$

すなわち　$92(x-150)=-197(y+70)$

92 と 197 は互いに素であるから，$92x+197y=10$ の整数解は，k を整数として

$$x=197k+150,\quad y=-92k-70$$

$k=-1$ のとき，x の絶対値は最小となる。

このとき　$x=$[オカキ]-47，$y=$[クケ]22

(2)　$11011_{(2)}=1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=1\cdot 2^4+(2+0)\cdot 2^2+(2+1)\cdot 2^0$

$=1\cdot 4^2+2\cdot 4^1+3\cdot 4^0=$[コサシ]$123_{(4)}$

また⓪～⑤の 6 進法の小数を 10 進法で表すと次のようになる。

⓪　$0.3_{(6)}=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=0.5$　　①　$0.4_{(6)}=4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

②　$0.33_{(6)}=3\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6^2}=\frac{7}{12}$　　③　$0.43_{(6)}=4\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6^2}=\frac{3}{4}=0.75$

④　$0.033_{(6)}=3\cdot\frac{1}{6^2}+3\cdot\frac{1}{6^3}=\frac{7}{72}$　　⑤　$0.043_{(6)}=4\cdot\frac{1}{6^2}+3\cdot\frac{1}{6^3}=\frac{1}{8}=0.125$

よって，有限小数として表せるのは　[ス，セ，ソ]⓪，③，⑤

別解　④，⑤は次のようにも計算できる。

④　$0.033_{(6)}=0.33_{(6)}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{72}$

⑤　$0.043_{(6)}=0.43_{(6)}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{8}=0.125$

参考　一般に，10 進数の整数でない既約分数 $\frac{m}{n}$ について，次のことが成り立つ。

分母 n の素因数は 2，5 だけからなる $\Longleftrightarrow$ $\frac{m}{n}$ は有限小数で表される

分母 n の素因数に 2，5 以外のものがある $\Longleftrightarrow$ $\frac{m}{n}$ は循環小数で表される

2． (1)

$$a=407=11\times 37$$
$$b=481=13\times 37$$

したがって，a と b の最大公約数は　[アイ]37

最小公倍数は　$11\times 13\times 37=$[ウエオカ]5291

$\sqrt{abc}=\sqrt{407\times 481\times c}=\sqrt{(11\times 37)\times(13\times 37)\times c}=37\sqrt{11\times 13\times c}$

$\sqrt{abc}$ が整数となる正の整数 c の中で，最小のものは

$c=11\times 13=$[キクケ]143

$$\begin{array}{r|r}37 & 74\\ & 74\\ \hline & 0\end{array}\quad(\text{商 }2)\qquad \begin{array}{r|r}74 & 407\\ & 370\\ \hline & 37\end{array}\quad(\text{商 }5)\qquad \begin{array}{r|r}407 & 481\\ & 407\\ \hline & 74\end{array}\quad(\text{商 }1)$$

参考　407 と 481 の最大公約数は，ユークリッドの互除法を用いて求めることもできる。

(2)　不定方程式 $407x=-481y$ の両辺を 37 で割ると　$11x=-13y$

11 と 13 は互いに素であるから，y は 11 の倍数である。

よって，k を整数として，$y=$[スセ]$11k$ と表される。ゆえに　$11x=-13\cdot 11k$　　したがって　$x=$[コサシ]$-13k$

(3)　不定方程式 $407x+481y=40700$ を 37 で割ると　$11x+13y=1100$

よって　$11(x-100)=-13y$

(2) より　$x-100=-13k$，$y=11k$（k は整数）　すなわち　$x=100-13k$，$y=11k$

x，y がともに 0 以上の整数のとき　$100-13k\geqq 0$，$11k\geqq 0$

よって　$0\leqq k\leqq\frac{100}{13}=7+\frac{9}{13}$　　この不等式を満たす整数 k の値は 0，1，……，7 の 8 個ある。

k の 1 つの値に対して x，y の組は 1 組定まるから，$ax+by=40700$ を満たす 0 以上の　整数 x，y の組は

[ソ]8 組　　この中で x が最も小さいものは，$k=7$ のときで　$x=100-13\cdot 7=$[タ]9　$y=11\cdot 7=$[チツ]77

不定方程式 $407x+481y=40700+37$ の両辺を37で割ると　$11x+13y=1100+1$　……①

また，$x=6$，$y=-5$ は不定方程式 $11x+13y=1$ を満たす整数である。

すなわち　$11\cdot 6+13\cdot(-5)=1$　……②

①−② より　$11(x-6)+13(y+5)=1100$

よって　$11(x-106)=-13(y+5)$

(2) より　$x-106=-13k$，$y+5=11k$（k は整数）

ゆえに　$x=106-13k$，$y=11k-5$

x，y がともに 0 以上の整数のとき　$106-13k\geqq 0$，$11k-5\geqq 0$　　よって　$\frac{5}{11}\leqq k\leqq\frac{106}{13}=8+\frac{2}{13}$

この不等式を満たす整数 k の値は 1，2，……，8 の 8 個ある。

k の 1 つの値に対して x，y の組は 1 組定まるから，$ax+by=40700+37$ を満たす 0 以　上の整数 x，y の組は

[テ]8 組　　この中で x が最も小さいものは，$k=8$ のときで　$x=106-13\cdot 8=$[ト]2　$y=11\cdot 8-5=$[ナニ]83

参考　（$11x+13y=1$ の整数解の見つけ方）

$11x+13y=1$ より　$11x+(11y+2y)=1$

よって　$11(x+y)+2y=1$

$x+y=1$，$y=-5$ はこの等式を満たす。

すなわち　$x=6$，$y=-5$