高２G 第3講　3-2の解答

3-2 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2$ と漸化式

$$a_{n+1}=2-\frac{a_n}{2a_n-1}$$

で定められている。

(1) a_2, a_3, a_4 を求め、一般項 a_n を表す n の式を推測せよ。

(2) (1)で推測した一般項の式が正しいことを、数学的帰納法によって証明せよ。

(1) $a_2=2-\dfrac{2}{4-1}=\dfrac{4}{3}$

$a_3=2-\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}-1}=2-\dfrac{4}{5}=\dfrac{6}{5}$

$a_4=2-\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{12}{5}-1}=2-\dfrac{6}{7}=\dfrac{8}{7}$

よって、$\underline{a_n=\dfrac{2n}{2n-1}}$ と推測できる

(2) ☆ 漸化式と帰納法では、仮定した前の項 a_k と漸化式を利用して、次の項 a_{k+1} を作る。

$a_n=\dfrac{2n}{2n-1}$ …(＊) であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき、(右辺) $=\dfrac{2}{2-1}=2=a_1$ より

(＊)は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき、(＊)が成り立つと仮定すると、$a_k=\dfrac{2k}{2k-1}$

このとき、

$$a_{k+1}=2-\frac{a_k}{2a_k-1}=\frac{3a_k-2}{2a_k-1}=\frac{\frac{6k}{2k-1}-2}{\frac{4k}{2k-1}-1}=\frac{6k-2(2k-1)}{4k-(2k-1)}=\frac{2k+2}{2k+1}$$

よって、$n=k+1$ のとき、(＊)は成り立つ。

(i),(ii)より、すべての自然数 n で、

$a_n=\dfrac{2n}{2n-1}$ である。■