[2014 センター追試]

不等式 $4\{\log_2(3-\sqrt{x})\}^2+3\log_{\frac{1}{8}}(3-\sqrt{x})^2-2>0$ ……① を満たす x のとり得る値の範囲を求めよう。

まず，真数は正であるから $0 \leqq x < \boxed{\text{ア}}$ ……② である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，
a を底といい，b を真数という。

$y=\log_{\frac{1}{8}}(3-\sqrt{x})^2$ とおくと，$\left(\dfrac{1}{8}\right)^y=(3-\sqrt{x})^2$ である。2 を底とする両辺の対数をとれば

$y=-\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\log_2(3-\sqrt{x})$ であることがわかる。

よって，$X=\log_2(3-\sqrt{x})$ とおくと，①は $\boxed{\text{エ}}X^2-X-1>0$ ……③ と表すことができる。

不等式③を解くと $X<-\dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}$，$X>\boxed{\text{カ}}$ となり，$X=\log_2(3-\sqrt{x})$ により

$3-\sqrt{x}<\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$，$3-\sqrt{x}>\boxed{\text{ケ}}$ ……④ であることがわかる。

②と④から，不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は

$0 \leqq x < \boxed{\text{コ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}-\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}<x<\boxed{\text{ア}}$ である。

[2011 センター追試]

$u=\log_2(6-x)$，$v=\log_2(x-1)$ とおく。uv の最大値を求めよう。

真数は正であるから $\boxed{ア}<x<\boxed{イ}$ である。

$\boxed{ア}<x\leqq\boxed{ウ}$ または $\boxed{エ}\leqq x<\boxed{イ}$ のとき，$uv\leqq 0$ であり，

$\boxed{ウ}<x<\boxed{エ}$ のとき，$u>0$，$v>0$ である。

よって，uv の最大値は $\boxed{ウ}<x<\boxed{エ}$ の範囲で考えればよい。

このとき，相加平均と相乗平均の関係により

$$\sqrt{uv}\leqq\frac{1}{2}(u+v)=\frac{1}{2}\log_2\left(\boxed{オ}x^2+\boxed{カ}x-\boxed{キ}\right)\quad\cdots\cdots(*)$$

である。

x の 2 次関数 $\boxed{オ}x^2+\boxed{カ}x-\boxed{キ}$ は $x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ をとる。

$\boxed{ウ}<\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}<\boxed{エ}$ であり，$x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ のとき，$(*)$ の不等式において等号が成り立つ。

したがって，uv は $x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ のときに最大値 $\left(\log_2\boxed{ス}-\boxed{セ}\right)^{\boxed{ソ}}$ をとる。