S③ 補足プリント　11番と12番の問題

11 (1) (方針) $d \leqq r$ or $D \geqq 0$

直線ℓの方程式は、$y=-2x+2 \iff 2x+y-2=0$

また、円の中心は、(r, r)である。

よって、Cとℓが共有点をもつ条件は、

$$\frac{|3r-2|}{\sqrt{5}} \leqq r$$

$$|3r-2| \leqq \sqrt{5}r$$

両辺0以上より、2乗すると

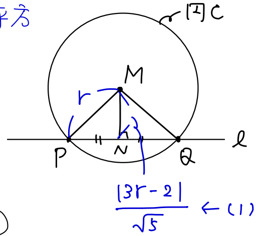
$$(3r-2)^2 \leqq 5r^2$$

$$r^2-3r+1 \leqq 0$$

$$\therefore \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqq r \leqq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

(2) (考え方) 円の弦の長さは、弦の半分を利用して、三平方

☆円の弦の長さは、三平方



解答 Cとℓが異なる2点で交わる条件は、

(1)より、$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < r < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ …①

円の中心をMとし、PQの中点をNとすると、

$PM=r$, $MN=\dfrac{|3r-2|}{\sqrt{5}}$

$\triangle PMN$において、三平方の定理より

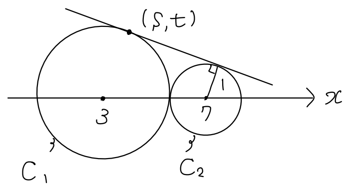
$$PN=\sqrt{r^2-\left(\frac{|3r-2|}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{-r^2+3r-1}$$

よって、$PQ=2PN=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{-\left(r-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}}$ より

PQは、①より

$r=\dfrac{3}{2}$のとき、最小値2

12 (3)の別解



(解1) ($a=7$が求まった後から)

C_1: $(x-3)^2+y^2=9$

C_2: $(x-7)^2+y^2=1$

円C_1上の点(s, t)における接線は、

$(s-3)(x-3)+ty=9$ …(*)

これが円C_2に接するとき

$$\frac{|4(s-3)-9|}{\sqrt{(s-3)^2+t^2}}=1 \quad \cdots ①$$

$$\therefore |4s-21|=\sqrt{(s-3)^2+t^2}$$

点(s, t)は、円C_1上の点より、

$(s-3)^2+t^2=9$ …②

よって、①は $|4s-21|=3$

$\therefore 4s-21=\pm 3$

$\therefore s=6, \dfrac{9}{2}$

よって、②より、

$(s, t)=(6, 0), \left(\dfrac{9}{2}, \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

したがって、求める共通接線は(*)より、

$x=6$, $x\pm\sqrt{3}y=9$

(解2) ($a=7$が求まった後から)

このとき、2円C_1とC_2の接点は$(6, 0)$であり、

この点における共通接線は$x=6$である。

ℓ: $y=mx+n$とする

ℓは、$mx-y+n=0$であり、ℓが

円C_1, C_2に接するとき、

$$\frac{|3m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=3 \cdots ①, \quad \frac{|7m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \cdots ②$$

①, ②より、

$$|3m+n|=3|7m+n|$$

☆x, yが実数のとき、$|x|=|y| \iff x=\pm y$

(i) $3m+n=3(7m+n)$のとき、

$n=-9m$

②より、$|-2m|=\sqrt{m^2+1}$

$\therefore 4m^2=m^2+1$

$\therefore m^2=\dfrac{1}{3}$

よって、$(m, n)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -3\sqrt{3}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 3\sqrt{3}\right)$

(ii) $-(3m+n)=3(7m+n)$のとき、

$n=-6m$

②より、$|m|=\sqrt{m^2+1}$

$\therefore m^2=m^2+1$

$1=0$となり、不適

以上より、求める共通接線は、

$x=6$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-3\sqrt{3}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+3\sqrt{3}$