No.1　演習プリント　　解答　　　　　　　　　　　　　　　名前（　　　　　　　　　　）

[2014 センター追試]

不等式 $4\{\log_2(3-\sqrt{x})\}^2+3\log_{\frac{1}{8}}(3-\sqrt{x})^2-2>0$ ……① について，真数は正であるから

$3-\sqrt{x}>0$　　すなわち　$\sqrt{x}<3$

したがって　$0\leqq x<{}^{\text{ア}}9$　……②

$y=\log_{\frac{1}{8}}(3-\sqrt{x})^2$ とおくと，$\left(\frac{1}{8}\right)^y=(3-\sqrt{x})^2$ である。

2を底とする両辺の対数をとると　$\log_2\left(\frac{1}{8}\right)^y=\log_2(3-\sqrt{x})^2$

$$y\log_2 2^{-3}=2\log_2(3-\sqrt{x})$$

$$-3y=2\log_2(3-\sqrt{x})$$

$$y=-\frac{{}^{\text{イ}}2}{{}^{\text{ウ}}3}\log_2(3-\sqrt{x})$$

よって，$X=\log_2(3-\sqrt{x})$ とおくと，①は

$$4X^2+3\left(-\frac{2}{3}X\right)-2>0$$

$${}^{\text{エ}}2X^2-X-1>0 \quad \cdots\cdots③$$

$$(2X+1)(X-1)>0$$

$$X<-\frac{1}{{}^{\text{オ}}2},\quad X>{}^{\text{カ}}1$$

$X=\log_2(3-\sqrt{x})$ であるから

$$\log_2(3-\sqrt{x})<-\frac{1}{2},\quad \log_2(3-\sqrt{x})>1$$

$$\log_2(3-\sqrt{x})<\log_2 2^{-\frac{1}{2}},\quad \log_2(3-\sqrt{x})>\log_2 2$$

底は2(>1)であるから　$3-\sqrt{x}<\frac{\sqrt{{}^{\text{キ}}2}}{{}^{\text{ク}}2}$，$3-\sqrt{x}>{}^{\text{ケ}}2$　……④

したがって　$\sqrt{x}>3-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sqrt{x}<1$

$0\leqq x<9$ であるから　$0\leqq x<1$，$\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2<x<9$

よって　$0\leqq x<{}^{\text{コ}}1$，$\frac{{}^{\text{サシ}}19}{{}^{\text{ス}}2}-{}^{\text{セ}}3\sqrt{2}<x<9$

[2011 センター追試]

真数は正であるから　$6-x>0$ かつ $x-1>0$

これを解いて　${}^{\text{ア}}1<x<{}^{\text{イ}}6$

ここで

$$u\leqq 0 \iff \log_2(6-x)\leqq 0 \iff \log_2(6-x)\leqq\log_2 1 \iff 0<6-x\leqq 1$$

$$\iff 5\leqq x<6,$$

$$v\leqq 0 \iff \log_2(x-1)\leqq 0 \iff \log_2(x-1)\leqq\log_2 1 \iff 0<x-1\leqq 1$$

$$\iff 1<x\leqq 2$$

同様にして

$$u>0 \iff \log_2(6-x)>0 \iff \log_2(6-x)>\log_2 1 \iff 6-x>1$$

$$\iff x<5,$$

$$v>0 \iff \log_2(x-1)>0 \iff \log_2(x-1)>\log_2 1 \iff x-1>1$$

$$\iff x>2$$

よって，$1<x\leqq{}^{\text{ウ}}2$ または ${}^{\text{エ}}5\leqq x<6$ のとき，$uv\leqq 0$ であり，$2<x<5$ のとき，$u>0$，$v>0$ である。

$2<x<5$ の範囲において，$u>0$，$v>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$\sqrt{uv}\leqq\frac{1}{2}(u+v)=\frac{1}{2}\{\log_2(6-x)+\log_2(x-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}\log_2(6-x)(x-1)$$

$$=\frac{1}{2}\log_2({}^{\text{オ}}-x^2+{}^{\text{カ}}7x-{}^{\text{キ}}6) \quad \cdots\cdots(*)$$

$-x^2+7x-6=-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ であるから，この x の2次関数は $x=\frac{{}^{\text{ク}}7}{{}^{\text{ケ}}2}$ で最大値 $\frac{{}^{\text{コサ}}25}{{}^{\text{シ}}4}$ をとる。

また，$2<\frac{7}{2}<5$ であるから，$x=\frac{7}{2}$ のとき，(*) の不等式において等号が成り立つ。

したがって，$\sqrt{uv}$ は $x=\frac{7}{2}$ のとき最大値

$$\frac{1}{2}\log_2\frac{25}{4}=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{5}{2}\right)^2=\log_2\frac{5}{2}=\log_2 5-\log_2 2=\log_2 5-1$$

をとるから，uv は $x=\frac{7}{2}$ のとき最大値 $(\log_2{}^{\text{ス}}5-{}^{\text{セ}}1)^{{}^{\text{ソ}}2}$ をとる。

参考　(*) の不等式において等号が成り立つのは，$u=v$ のときである。

$u=v$ から　$\log_2(6-x)=\log_2(x-1)$

よって　$6-x=x-1$　　これを解くと　$x=\frac{7}{2}$