# 三角関数演習プリント　解答

1．［福岡大改］

$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{2}{3}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{4}{9}$$

ゆえに　$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{4}{9}$

よって　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{4}{9}\right) = {}^{ア}\dfrac{5}{18}$

ゆえに　$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{14}{9}$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta + \cos\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta + \cos\theta = {}^{イ}\frac{\sqrt{14}}{3}$$

よって　$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$

$$= \frac{\sqrt{14}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = {}^{ウ}-\frac{2\sqrt{14}}{9}$$

また　$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi + 2\theta\right) = -\cos 2\theta = {}^{エ}\dfrac{2\sqrt{14}}{9}$

2．［北里大］

(1)　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\alpha > 0$ であるから　$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}$

よって　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5} = {}^{ア}\dfrac{24}{25}$

$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ のとき $\cos\beta < 0$ であるから　$\cos\beta = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = -\dfrac{5}{13}$

このとき　$\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = -\dfrac{12}{5}$

また　$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$

よって　$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\dfrac{4}{3} - \left(-\dfrac{12}{5}\right)}{1 + \dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{12}{5}\right)} = {}^{イ}-\dfrac{56}{33}$

また　$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\dfrac{7}{25}$

であるから　$\sin(2\alpha + \beta) = \sin 2\alpha\cos\beta + \cos 2\alpha\sin\beta$

$$= \frac{24}{25}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) + \left(-\frac{7}{25}\right)\cdot\frac{12}{13} = {}^{ウ}-\frac{204}{325}$$

3．［成蹊大］

$y = \dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ から　$y = \dfrac{1}{3}\sin\left\{\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}$

よって，$y = \sin x$ のグラフを，$y$ 軸をもとにして $x$ 軸方向へ ${}^{ア}2$ 倍に拡大し，$x$ 軸をもとにして $y$ 軸方向へ ${}^{イ}\dfrac{1}{3}$ 倍に縮小し，それを $x$ 軸方向に ${}^{ウ}\dfrac{2}{3}\pi$ だけ平行移動したものである。また，正で最小の周期は $2\pi \div \dfrac{1}{2} = 4\pi$ より，${}^{エ}4\pi$ である。

4．［防衛大学校］

(1)　$f(x) = 2\cos^2 x - 1 + 2\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{6}\right) + \sin x = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 1$

(2)　(1) から　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\cos^2\dfrac{\pi}{2} + \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2} - 1 = -1$

(3)　$\cos x = t$ とおくと　$-1 \leqq t \leqq 1$　……①

(1) から　$f(x) = 2t^2 + \sqrt{3}t - 1 = 2\left(t + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \dfrac{11}{8}$

① から，$f(x)$ は $t = 1$ のとき最大値，$t = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき最小値をとる。

$t = 1$ のとき　$f(x) = 1 + \sqrt{3}$，$t = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき　$f(x) = -\dfrac{11}{8}$

よって　$M = 1 + \sqrt{3}$，$m = -\dfrac{11}{8}$

5．［岡山大］

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ の両辺を 2 乗して　$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{5}$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{5}$$

$$\sin\theta\cos\theta = -\frac{2}{5}$$

よって　$(\cos\theta - \sin\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\cdot\left(-\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{9}{5}$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ であるから　$\cos\theta \leqq 0$，$\sin\theta \geqq 0$

よって，$\cos\theta - \sin\theta \leqq 0$ であるから　$\cos\theta - \sin\theta = -\sqrt{\dfrac{9}{5}} = -\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

(2)　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\left(-\dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{4}{5}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right) = -\dfrac{3}{5}$

よって　$2\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos 2\theta\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin 2\theta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$= \cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta$$

$$= -\frac{3}{5} + \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3 + 4\sqrt{3}}{5}$$

(3)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より　$\dfrac{2}{3}\pi \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{3}\pi$

このとき，$2\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -1$ すなわち $\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -\dfrac{1}{2}$ から

$$\frac{2}{3}\pi \leqq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi$$

よって　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{6}\pi$　……①

また　$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta\right) = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$

① より $\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} \leqq \pi$ であるから，

$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2}{3}\pi$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$，

$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \pi$ すなわち $\theta = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最小値 $2\cdot 0 = 0$ をとる。

6．［福岡大］

$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから，不等式 $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta \leqq 1$ は

$2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$　　すなわち　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq \dfrac{1}{2}$　……①

$0 \leqq \theta < \pi$ より　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5}{6}\pi$

よって，① を満たす $\theta - \dfrac{\pi}{6}$ の値の範囲は　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

ゆえに　${}^{ア}0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$

また，方程式 $\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$ から

$4\cos^3 x - 3\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) + \cos x = 0$

整理すると　$4\cos^3 x - 4\cos^2 x - 2\cos x + 2 = 0$

すなわち　$2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

ゆえに　$(\cos x - 1)(\sqrt{2}\cos x - 1)(\sqrt{2}\cos x + 1) = 0$

よって　$\cos x = 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，$0 \leqq x < \pi$ であるから　$x = {}^{イ}0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

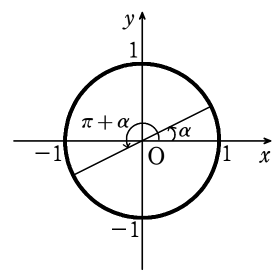
与式を変形すると　$y = \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$

ただし　$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$　$\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから　$\alpha \leqq \theta + \alpha \leqq \pi + \alpha$

よって　$-\dfrac{1}{\sqrt{5}} \leqq \sin(\theta + \alpha) \leqq 1$

したがって　${}^{ウ}1 \leqq y \leqq \sqrt{5}$



# 三角関数演習プリント　解答

7．［小樽商科大］

$y=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}+\sin2\theta+3\cdot\dfrac{1+\cos2\theta}{2}=\sin2\theta+\cos2\theta+2=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ から　　$\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$

ゆえに，$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{8}$ で最大値 $2+\sqrt{2}$，

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$　すなわち　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{4}$ で最小値 3　をとる。

8．［北海道大］

(1)　$t=\sin x+\cos x$ から　　$t^2=1+2\sin x\cos x$

よって，$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$ であるから

$$f(x)=\sqrt{2}\cdot\frac{t^2-1}{2}+t=\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+t-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2)　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と変形できる。

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9}{4}\pi$　……① であるから　　$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$

よって　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　(1)，(2) から

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{3\sqrt{2}}{4}\quad(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$$

よって　$t=\sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値 $-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　をとる。

$t=\sqrt{2}$ のとき　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

① から　$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$x=\dfrac{\pi}{4}$

$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$

① から　$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　　よって　$x=\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi$

したがって　　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$；

$x=\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

9．［関西大］

$\cos y=\sqrt{3}-\sin x$，$\sin y=-1-\cos x$ を，$\sin^2y+\cos^2y=1$ に代入して

$$(-1-\cos x)^2+(\sqrt{3}-\sin x)^2=1$$

展開して整理すると　　$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2$

よって　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11}{6}\pi$ から　　$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　　　したがって　　$x=\dfrac{2}{3}\pi$

このとき　　$\cos y=\sqrt{3}-\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$\sin y=-1-\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq y<2\pi$ から　　$y=\dfrac{11}{6}\pi$

10．［岐阜薬科大］

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を 2 乗すると

$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$

ゆえに　　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$

よって　　$y=-2\cdot\dfrac{t^2-1}{2}+2at-a=-t^2+2at-a+1$

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ であるから　　$0\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに　　$0\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$　　　よって　　$0\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　(1)，(2) の結果より

$y=-(t-a)^2+a^2-a+1$ $(0\leqq t\leqq\sqrt{2})$

[1]　$0<a<\sqrt{2}$ のとき

$y$ は $t=a$ で最大値をとる。

よって　　$M(a)=a^2-a+1$

[2]　$a\geqq\sqrt{2}$ のとき

$y$ は $t=\sqrt{2}$ で最大値をとる。

よって　　$M(a)=-2+2\sqrt{2}a-a+1=(2\sqrt{2}-1)a-1$

[1]，[2] より　　$0<a<\sqrt{2}$ のとき　　$M(a)=a^2-a+1$

$a\geqq\sqrt{2}$ のとき　　$M(a)=(2\sqrt{2}-1)a-1$

(4)　(3) の結果より

[1]　$0<a<\sqrt{2}$ のとき　　$M(a)=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

よって，$M(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $M\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ をとる。

[2]　$a\geqq\sqrt{2}$ のとき $M(a)$ は単調に増加するから，$a=\sqrt{2}$ で最小値

$M(\sqrt{2})=3-\sqrt{2}$ をとる。

ここで，$1<\sqrt{2}<2$ であるから　　$\dfrac{3}{4}<3-\sqrt{2}$

よって，[1]，[2] より，$M(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

11．［岩手大］

(1)　$f(x)=2\sin^2x+4\sin x+3(1-2\sin^2x)=-4\sin^2x+4\sin x+3$

$=-4t^2+4t+3$

(2)　$0\leqq x<2\pi$ であるから　　$-1\leqq t\leqq1$

$g(t)=-4t^2+4t+3$ とおくと　　$g(t)=-4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+4$

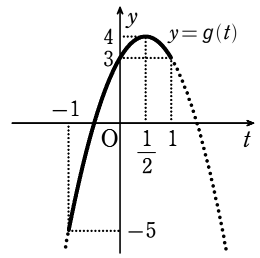
よって，$g(t)$ すなわち $f(x)$ は，$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 4 をとり，$t=-1$ すなわち

$\sin x=-1$ のとき最小値 $-5$ をとる。

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ のとき　　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$\sin x=-1$ のとき　　$x=\dfrac{3}{2}\pi$




(3)　$\sin x=t$　……① を満たす $x\ (0\leqq x<2\pi)$ の個数は次のようになる。

$-1<t<1$ のとき　2 個

$t=-1,\ 1$ のとき　1 個

$t<-1,\ 1<t$ のとき　① を満たす $x$ は 存在しない

よって，$f(x)=a$ が相異なる 4 個の解をもつ条件は，$g(t)=a$ が $-1<t<1$ の範囲で異なる 2 個の解をもつことである。

$y=g(t)$ のグラフから，求める $a$ の値の範囲は　　$3<a<4$

12．［関西大］

(1)　$x=\cos\theta$，$0\leqq\theta<2\pi$ から

${}^{\text{ア}}-1\leqq x\leqq{}^{\text{イ}}1$

(2)　$x=\cos\theta$，$x+y=\sin\theta$ から

$y=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{1^2+(-1)^2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$={}^{\text{ウ}}\sqrt{2}\sin\left(\theta+{}^{\text{エ}}\dfrac{7}{4}\pi\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき　　$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{7}{4}\pi\right)\leqq1$

よって　　${}^{\text{オ}}-\sqrt{2}\leqq y\leqq{}^{\text{カ}}\sqrt{2}$

(3)　$x^2+y^2=\cos^2\theta+(\sin\theta-\cos\theta)^2=\cos^2\theta+1-2\sin\theta\cos\theta$

$=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}+1-\sin2\theta=\dfrac{3}{2}+(-1)\sin2\theta+\dfrac{1}{2}\cos2\theta$

$=\dfrac{3}{2}+\sqrt{(-1)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\sin(2\theta+\alpha)={}^{\text{ケ}}\dfrac{3}{2}+{}^{\text{コ}}\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta+\alpha)$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\div\dfrac{\sqrt{5}}{2}={}^{\text{キ}}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=-1\div\dfrac{\sqrt{5}}{2}={}^{\text{ク}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき $-1\leqq\sin(2\theta+\alpha)\leqq1$ であるから

${}^{\text{サ}}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq x^2+y^2\leqq{}^{\text{シ}}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$