No.4　演習プリント　解答

名前（　　　　　　　　　　　　）

1．等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると　　$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_2=-\dfrac{7}{3}$ から　　$a_1+d=-\dfrac{7}{3}$　……③

$a_5=-\dfrac{25}{3}$ から　　$a_1+4d=-\dfrac{25}{3}$　……④

③，④を解くと　　$a_1=\dfrac{{}^{\text{アイ}}-1}{{}^{\text{ウ}}3}$，$d={}^{\text{エオ}}-2$

よって　　$a_n=-\dfrac{1}{3}+(n-1)\cdot(-2)={}^{\text{カキ}}-2n+\dfrac{{}^{\text{ク}}5}{{}^{\text{ケ}}3}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(-2k+\frac{5}{3}\right)=-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{5}{3}n={}^{\text{コ}}-n^2+\frac{{}^{\text{サ}}2}{{}^{\text{シ}}3}n$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{4}{3}b_n+S_n$ ……①に $n=1$ を代入すると　　$b_1=\dfrac{4}{3}b_1+S_1$

すなわち　　$b_1=-3S_1$

$S_1=a_1=-\dfrac{1}{3}$ であるから　　$b_1=-3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)={}^{\text{ス}}1$

①の n を $n+1$ におき換えると　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\frac{4}{3}b_{n+1}+S_{n+1}$　……⑤

①，⑤を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+b_{n+1}$ の両辺に代入すると

$\dfrac{4}{3}b_{n+1}+S_{n+1}=\dfrac{4}{3}b_n+S_n+b_{n+1}$　　　よって　　$b_{n+1}=4b_n-3(S_{n+1}-S_n)$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=-2n-\dfrac{1}{3}$ であるから

$$b_{n+1}=4b_n-3\left(-2n-\frac{1}{3}\right)={}^{\text{セ}}4b_n+{}^{\text{ソ}}6n+{}^{\text{タ}}1\ \text{……⑥}$$

実数 α，β を用いて $b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=4(b_n+\alpha n+\beta)$ と表されるとすると

$$b_{n+1}=4b_n+3\alpha n-\alpha+3\beta$$

$3\alpha=6$，$-\alpha+3\beta=1$ を連立して解くと　　$\alpha=2$，$\beta=1$

よって，⑥は $b_{n+1}+{}^{\text{チ}}2(n+1)+{}^{\text{ツ}}1=4(b_n+2n+1)$ と変形できる。

$c_n=b_n+2n+1$ ……②　とおくと　　$c_{n+1}=4c_n$

$\{c_n\}$ は，$c_1=b_1+2\cdot1+1=1+2+1={}^{\text{テ}}4$，公比が ${}^{\text{ト}}4$ の等比数列であるから

$$c_n=4\cdot4^{n-1}=4^n$$

ゆえに，②より　　$b_n=c_n-2n-1={}^{\text{ナ}}4^n-{}^{\text{ヌ}}2n-{}^{\text{ネ}}1$　（${}^{\text{ニ}}$⓪）

2．$a_1=\dfrac{a_2}{3}=\dfrac{162}{3}=54$　　　よって　　$a_n={}^{\text{アイ}}54\cdot{}^{\text{ウ}}3^{n-1}$

ゆえに，①から　　$b_{n+1}=3b_n+54\cdot3^{n-1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると　　$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{b_n}{3^n}+\dfrac{54\cdot3^{n-1}}{9\cdot3^{n-1}}$

よって　　$x_{n+1}=x_n+{}^{\text{エ}}6$

さらに　　$x_1=\dfrac{b_1}{3^1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{3}\cdot27=9$

したがって，数列 $\{x_n\}$ は初項 9，公差 6 の等差数列であるから

$$x_n=9+(n-1)\cdot6=6n+3,\quad b_n=3^nx_n=3^n(6n+3)=3^{n+1}(2n+1)$$

ゆえに　　$\dfrac{b_{10}}{3^{10}}=x_{10}=6\cdot10+3={}^{\text{オカ}}63$

また，①から　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_{k+1}=3\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}a_k$　　　ゆえに　　$\displaystyle S_{n+1}-b_1=3S_n+\sum_{k=1}^{n}a_k$

すなわち　　$\displaystyle S_{n+1}-{}^{\text{キク}}27=3S_n+\sum_{k=1}^{n}a_k$ ……③

ここで　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{54(3^n-1)}{3-1}=27(3^n-1)=3^{n+3}-27$，

$$S_{n+1}=S_n+b_{n+1}=S_n+3^{n+2}(2n+3)=S_n+2n\cdot3^{n+2}+3^{n+3}$$

これらを③に代入すると　　$S_n+2n\cdot3^{n+2}+3^{n+3}-27=3S_n+3^{n+3}-27$

よって　　$S_n=n\cdot3^{n+2}$　　　したがって　　$\dfrac{S_{10}}{3^{10}}=\dfrac{10\cdot3^{12}}{3^{10}}={}^{\text{ケコ}}90$

また，②から　　$c_{n+1}=3c_n+3^{n+1}(2n+1)$

両辺を 3^{n+1} で割ると　　$\dfrac{c_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{c_n}{3^n}+2n+1$

よって　　$y_{n+1}=y_n+{}^{\text{サ}}2n+{}^{\text{シ}}1$　　　すなわち　　$y_{n+1}-y_n=2n+1$

$n=1$ のとき　　$y_1=\dfrac{c_1}{3^1}=\dfrac{3}{3}=1$

$n\geqq2$ のとき　　$\displaystyle y_n=y_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=1+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+n-1=n^2$ ……④

$n=1$ のとき $n^2=1$ であるから，④は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　　$y_n=n^2$，$c_n=3^ny_n=n^2\cdot3^n$　　　したがって　　$\dfrac{c_{10}}{3^{10}}=y_{10}=10^2={}^{\text{スセソ}}100$

また，②から　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_{k+1}=3\sum_{k=1}^{n}c_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$　　　よって　　$T_{n+1}-c_1=3T_n+S_n$

すなわち，$T_{n+1}-{}^{\text{タ}}3=3T_n+S_n$ であるから　　$T_n+c_{n+1}-3=3T_n+S_n$

ゆえに　　$T_n+(n+1)^2\cdot3^{n+1}-3=3T_n+n\cdot3^{n+2}$

したがって　　$T_n=\dfrac{\{(n+1)^2-3n\}3^{n+1}-3}{2}=\dfrac{(n^2-n+{}^{\text{チ}}1)^{\text{ツ}}3^{n+1}-{}^{\text{テ}}3}{{}^{\text{ト}}2}$