ベクトル演習プリント

8題+7題(8題を何回も繰り返し解きましょう。余裕のある人は後半7題も繰り返し解いて身に着けよう。)

1.［関西学院大］

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=7$ を満たしている。このとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ア}}$ である。また，$|2\vec{a}+\vec{b}|=\boxed{\text{イ}}$ であり，$\vec{a}-2\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ のなす角を

θ とすると，$\cos\theta=\boxed{\text{ウ}}$ である。更に，t が実数全体を動くとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値

は $\boxed{\text{エ}}$ で，そのときの t の値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

2.［国士舘大］

ベクトル $\vec{a}=(-1,\ x)$，$\vec{b}=(-4,\ 3)$ に対し，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $2\vec{a}+\vec{b}$ とベクトル $\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるような x の値は $x=\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) ベクトル $2\vec{a}+\vec{b}$ とベクトル $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような x の値は $x=\boxed{\text{イ}}$ と

$\boxed{\text{ウ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{イ}}<\boxed{\text{ウ}}$ である。

3.［関西大］

△ABC とその内部にある点 P が，$7\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{ア}}$ と表される。

また，△PAB，△PBC，△PCA の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると，

$S_1:S_2:S_3=\boxed{\text{イ}}$ である。

4.［東北大］

三角形 OAB の 2 辺 OA, OB をそれぞれ 3：1, 4：1 に内分する点を C, D とし，BC と AD の交点を P，CD と OP の交点を Q とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ とおくとき

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を使って表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を使って表せ。

5.［西南学院大］

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 2：1 に内分する点を E，辺 AD を 3：2 に内分する点を F，辺 AD の中点を G とする。直線 BG と直線 EF の交点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である。また，直線 AP と直線 DC の交点を Q とすると，

$\mathrm{DQ}:\mathrm{QC}=\boxed{\text{オ}}:\boxed{\text{カ}}$ である。

6.［香川大］

平行四辺形 ABCD は，AB=2，AD=3，$\cos\angle\mathrm{BAD}=\dfrac{1}{3}$ を満たしているとする。直線 BC 上に BC⊥AP となる点 P をとり，直線 BD 上に BD⊥AQ となる点 Q をとる。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ を求めよ。

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を求めよ。

7.［神戸大］

四面体 OABC において，P を辺 OA の中点，Q を辺 OB を 2：1 に内分する点，R を辺 BC の中点とする。P，Q，R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ。

(3) 四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ。

8.［金沢工業大改］

原点を O とする空間に 3 点 A(1，−2，−1)，B(1，−3，0)，C(2，−3，1) をとり，O から 3 点 A，B，C を含む平面に垂線 OH を下ろす。

(1) ∠BAC の大きさを求めよ。

(2) H の座標を求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

9.［大阪府立大］

OA=OB=1 を満たす二等辺三角形 OAB において，辺 AB を 1：3 に内分する点を P，辺 OB の中点を Q，直線 OP と直線 AQ の交点を R，直線 BR と辺 OA の交点を S とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。このとき，直線 BS は辺 OA と直交しているとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BS}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(4) 三角形 OAB の面積を求めよ。

10.［摂南大］

辺の長さが 1 に等しい正三角形 OAB に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。

定数 s，t が条件 $0\leqq s+t\leqq\dfrac{1}{2}$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ を満たして変化するとき，点 P の存在する

範囲の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。定数 s，t が条件 $0\leqq 2s+t\leqq1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ を満た

して変化するとき，点 P の存在する範囲の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

11.［早稲田大］

三角形 OAB において OA=4，OB=5，AB=6 とする。

三角形 OAB の外心を H とするとき $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

12.［星薬科大］

空間内の 2 点 (−1，3，−2)，(−3，2，−1) を通る直線 ℓ がある。x 軸上の点 P と ℓ 上の点 Q との距離が最小になるときの P の座標は $\left(-\boxed{\text{ア}},\ 0,\ 0\right)$，Q の座標は

$\left(-\boxed{\text{イ}},\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)$ であり，その距離の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

13.［横浜国立大］

点 O を中心とする半径 1 の円に内接する三角形 ABC があり，

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしている。この円上に点 P があり，線分 AB と線分 CP は直交している。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ をそれぞれ求めよ。

(2) 線分 AB と線分 CP の交点を H とするとき，AH：HB を求めよ。

(3) 四角形 APBC の面積を求めよ。

14.［静岡大］

三角形 OAB において，頂点 A，B におけるそれぞれの外角の二等分線の交点を C とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P が ∠AOB の二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ となる実数 t が存在

することを示せ。

(2) $|\vec{a}|=7$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

15.［岡山大］

平面上の異なる 3 点 O，A，B は同一直線上にないものとする。

この平面上の点 P が $2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を満たすとき，

次の問いに答えよ。

(1) P の軌跡が円となることを示せ。

(2) (1) の円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3) O との距離が最小となる (1) の円周上の点を $\mathrm{P_0}$ とする。A，B が条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる s，t の値を求めよ。