積分演習プリント

8 題＋7 題（8 題を何回も繰り返し解きましょう。余裕のある人は後半 7 題も繰り返し解いて身に着けよう。）

1．［長崎大］

関数 $f(x)$ は次の条件（ア），（イ），（ウ）を満たす。そのような正の数 a の値と $f(x)$ を求めよ。

（ア）　$f'(x)=x^2+ax$

（イ）　$f(0)=-1$

（ウ）　$f(x)$ の極大値と極小値の差が $\dfrac{4}{81}$

2．［(1) 神奈川大　(2) 慶応義塾大］

(1)　関数 $f(x)$ と定数 k が等式 $\displaystyle\int_3^x f(t)dt=2x^2-4x+k$ を満たすとき，

$f(x)=$ ${}^{ア}\boxed{}$ で，$k=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　関数 $f(x)$ が $f(x)=2x^2+3x+\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$ を満たすとき，$f(x)=\boxed{}$ である。

3．［同志社大］

1 次関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_{-1}^x f(t)dt=2x^2-ax+a$ を満たすとき，定数 a は $a=$ ${}^{ア}\boxed{}$ である。

このとき，$\displaystyle\int_{-1}^1 |f(x)|dx=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

4．［名城大］

放物線 $C:y=2x^2$ と直線 $\ell_1:y=-3x+2$ がある。C と ℓ_1 によって囲まれた部分の面積を S_1 とし，C，ℓ_1 および直線 $\ell_2:x=1$ によって囲まれた部分の面積を S_2 とすると，

$S_1=$ ${}^{ア}\boxed{}$，$S_2=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

5．［職業能力開発総合大学校］

$f(x)=x^2+2x+2$ とする。曲線 $y=f(x)$ の点 $(1,\ f(1))$ における接線の方程式は，

$y=$ ${}^{ア}\boxed{}$ $x+$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。この接線と y 軸，および曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積は，${}^{ウ}\boxed{}$ である。

6．［小樽商科大］

曲線 $y=-x(x-2)$ と x 軸で囲まれた面積を，直線 $y=(-a+2)x$ が 2 等分するとき，定数 a を求めよ。

7．［福岡大］

直線 ℓ は，2 つの放物線 $C_1:y=(x-1)^2$ と $C_2:y=x^2-6x+5$ に接しているとする。

(1)　直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　放物線 C_1 と C_2 および直線 ℓ とで囲まれる部分の面積を求めよ。

8．［室蘭工業大］

a，b を定数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=x^3+ax+b$ と定める。また，$f(-2)=-1$，$f'(-2)=9$ とする。

(1)　a，b の値を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 A $(-2,\ -1)$ における接線を ℓ とする。また，点 A を通らない ℓ に平行な $y=f(x)$ の接線を m とする。このとき，ℓ および m の方程式を求めよ。

(3)　(2) で求めた m と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

9．［神戸学院大］

関数 $y=|x^2-2x|$ ……① について，次のことがいえる。

(1)　座標平面上で，関数 ① のグラフと x 軸との共有点の x 座標の値は ${}^{ア}\boxed{}$，${}^{イ}\boxed{}$ である。ただし，${}^{ア}\boxed{}<{}^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　$\displaystyle\int_{-1}^0 |x^2-2x|dx=\frac{{}^{ウ}\boxed{}}{{}^{エ}\boxed{}}$

(3)　$\displaystyle\int_0^3 |x^2-2x|dx=\frac{{}^{オ}\boxed{}}{{}^{カ}\boxed{}}$

(4)　$F(a)=\displaystyle\int_a^{a+2}|x^2-2x|dx$ について，$0<a<2$ のとき

$F(a)=\dfrac{{}^{キ}\boxed{}}{{}^{ク}\boxed{}}a^3+\dfrac{{}^{ケ}\boxed{}}{{}^{コ}\boxed{}}$　である。

10．［京都大］

座標平面上で，点 $(1,\ 2)$ を通り傾き a の直線と放物線 $y=x^2$ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。a が $0\leqq a\leqq 6$ の範囲を変化するとき，$S(a)$ を最小にするような a の値を求めよ。

11．［学習院大］

放物線 $C:y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，P における C の接線と直交する直線を L とする。ただし，t は正の実数とする。

(1)　L の方程式を求めよ。

(2)　L と C とで囲まれた部分の面積を S とする。t が正の実数全体を動くとき，S の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

12．［福岡大］

$a>0$ とし，放物線 $C:y=\dfrac{1}{2}ax^2$ 上の点 $\mathrm{P}(2,\ 2a)$ をとる。直線 ℓ は，点 P での C の接線と P で直交しているとする。

(1)　直線 ℓ の y 切片を a を用いて表せ。

(2)　放物線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ。
また，その面積 S の最小値を求めよ。

13．［高知大］

座標平面上に放物線 $C:y=\dfrac{1}{6\sqrt{3}}x^2$ を考える。

(1)　C と 2 点 $\left(-3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で接している円の方程式を求めよ。

(2)　C と (1) の円で囲まれる部分の面積を求めよ。

(3)　C と点 $\left(3,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で接し，y 軸にも接している円の方程式を求めよ。

(4)　C と y 軸および (3) の円で囲まれる部分の面積を求めよ。

14．［東京電機大］

曲線 $C:y=|x^2-4|$ と直線 $\ell:y=2x+4$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。

15．［関西学院大］

m を正の実数とする。xy 平面において $y=|2x(x-2)|$ で表される曲線を C，$y=mx$ で表される直線を ℓ とする。

(1)　C と ℓ の共有点が 3 個であるような m の値の範囲を求めよ。

(2)　m が (1) で求めた範囲にあるとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S を m の式で表せ。

(3)　m が (1) で求めた範囲で変化するとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S の増減表をかいて，S を最小にする m の値を求めよ。