円のベクトル方程式

1．［センター追試］

平面上の四角形 OABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=60°$ であるとする。点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{5}{4} \quad \cdots\cdots ①$$

を満たしながら動くとき，三角形 OCP の面積の最小値を求めよう。

以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおく。

まず，点 P の動く範囲を考えよう。① は，$(\vec{a}-\vec{p})\cdot(\vec{b}-\vec{p})=\dfrac{5}{4}$ であるから，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ア}}$ に注意すると $|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}=0$ と書き換えられる。

これはさらに $\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\boxed{\text{エ}}}\right|=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ と書き換えられる。点 M を $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\boxed{\text{エ}}}$

となるように定めると，点 P は，M を中心とする半径 $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ の円周上を動く。

次に，点 P と直線 OC の距離について考えよう。直線 OC 上の点 H を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ となるようにとる。実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MH}}=\boxed{\text{カ}}$ であることから，

$t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となる。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であるから，点 P が ① を

満たしながら動くとき，点 P と直線 OC の距離の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ となる。

したがって，三角形 OCP の面積の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

2．［岡山大］

平面上の異なる 3 点 O，A，B は同一直線上にないものとする。

この平面上の点 P が

$$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　P の軌跡が円となることを示せ。

(2)　(1) の円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3)　O との距離が最小となる (1) の円周上の点を $\mathrm{P_0}$ とする。A，B が条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる s，t の値を求めよ。