微分演習プリント　　解答

1．［岡山理科大］

(1)　$f'(x)=3x^2-2$

(2)　(1)より　$f'(-1)=1$

よって，点 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$ における接線の方程式は

$y-3=1\cdot(x+1)$　　すなわち　$y=x+4$

(3)　接点 P 以外の共有点の x 座標は，次の方程式の $x=-1$ 以外の実数解である。

$x^3-2x+2=x+4$　　整理して　$x^3-3x-2=0$

因数分解して　$(x+1)^2(x-2)=0$

よって，求める共有点の x 座標は　2

$y=x+4$ に代入すると　$y=6$

したがって，求める点の座標は　$(2,\ 6)$

2．［名城大］

(1)　$f(x)=x^3-5x$ とおくと　$f'(x)=3x^2-5$

ゆえに　$f'(2)=3\cdot2^2-5=12-5=7$

よって，求める接線の方程式は

$y-(-2)=7(x-2)$　すなわち　$y=7x-16$

(2)　曲線 $y=x^3-5x$ と接線の接点の x 座標を a とすると，接線の傾きが -2 であるから

$3a^2-5=-2$　　よって　$a^2=1$　　ゆえに　$a=\pm1$

$a=1$ のとき，$f(1)=1-5=-4$ であるから，接線の方程式は

$y-(-4)=-2(x-1)$　すなわち　$y=-2x-2$

$a=-1$ のとき，$f(-1)=-1+5=4$ であるから，接線の方程式は

$y-4=-2\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=-2x+2$

したがって，求める接線の方程式は　$y=-2x-2,\ y=-2x+2$

(3)　曲線 $y=x^3$ と接線の接点の座標を $(b,\ b^3)$ とする。

$y'=3x^2$ であるから，接線の方程式は

$y-b^3=3b^2(x-b)$　すなわち　$y=3b^2x-2b^3$

この直線が点 $(-1,\ 0)$ を通るとき　$0=-3b^2-2b^3$

よって　$b^2(2b+3)=0$　　ゆえに　$b=0,\ -\dfrac{3}{2}$

したがって，求める接線の方程式は

$b=0$ のとき　$y=0$，　$b=-\dfrac{3}{2}$ のとき　$y=\dfrac{27}{4}x+\dfrac{27}{4}$

3．［東京電機大］

$y'=3x^2+4kx-8k$

y が極値をもたないための必要十分条件は，y' の符号が変わらないことである。

ゆえに，$y'=0$ すなわち $3x^2+4kx-8k=0$ ……① は実数解を 1 つだけもつかまたは実数解をもたない。

よって，① の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-3\cdot(-8k)=4k^2+24k=4k(k+6)$

ゆえに　$k(k+6)\leqq0$　　よって　$-6\leqq k\leqq0$

4．［東京理科大］

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ から

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の方程式は $y=12x-4$ であるから

$f'(0)=12,\ f(0)=-4$

よって　$c=12,\ d=-4$

ゆえに　$f(x)=ax^3+bx^2+12x-4$

また，関数 $f(x)$ が $x=2$ で極値 0 をとるならば

$f'(2)=0,\ f(2)=0$

よって　$12a+4b+12=0,\ 8a+4b+20=0$

これを解いて　$a=2,\ b=-9$

逆に，このとき　$f(x)=2x^3-9x^2+12x-4$

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

また，$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ 2$

$f(x)$ の増減表は次のようになり，$x=2$ で極値 0 をとる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

したがって　$a=2,\ b=-9,\ c=12,\ d=-4$

5．［金沢工業大］

(1)　$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x-2)(x+1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-7	↗	20	↘

よって，$f(x)$ は $x=$ ア2 で極大値 イ20 をとり，$x=$ ウ-1 で極小値 エ-7 をとる。

(2)　区間 $0\leqq x\leqq4$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	20	↘	-32

よって，$f(x)$ は $x=$ オ2 で最大値 カ20 をとり，$x=$ キ4 で最小値 ク-32 をとる。

6．［西南学院大］

$f(x)=-4x^3+15x^2+18x+a$ から

$f'(x)=-12x^2+30x+18=-6(x-3)(2x+1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=3,\ -\dfrac{1}{2}$

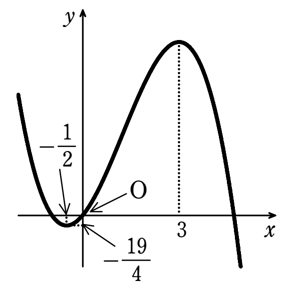
$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，$f(x)$ は，$x=\dfrac{{}^{ア}-1}{{}^{イ}2}$ で極小値，$x=$ ウ3 で極大値をとる。

また，$f(x)=0$ から　$-4x^3+15x^2+18x=-a$

関数 $y=-4x^3+15x^2+18x$ の増減は上の表のようになり，そのグラフは，右の図のようになる。



方程式 $f(x)=0$ の異なる 3 つの実数解のうち 2 つが負となるのは，曲線 $y=-4x^3+15x^2+18x$ と直線 $y=-a$ が異なる 3 点で交わり，そのうちの 2 点が $x<0$ の範囲にあるときである。

ゆえに　$-\dfrac{19}{4}<-a<0$

よって，求める a の値の範囲は　エ$0<a<\dfrac{{}^{オ}19}{{}^{カ}4}$

7．［福岡大］

(1)　$f'(x)=3x^2-12x+3$

よって，点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y-(t^3-6t^2+3t-8)=(3t^2-12t+3)(x-t)$

すなわち　$y=3(t^2-4t+1)x-2t^3+6t^2-8$　……①

(2)　① が点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ を通るとき　$p=3(t^2-4t+1)\cdot0-2t^3+6t^2-8$

よって　$-2t^3+6t^2-8=p$　……②

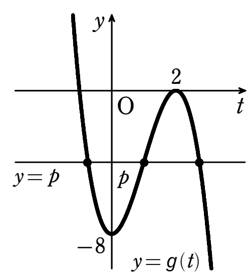
3 次関数のグラフでは，接点が異なれば接線も異なる。ゆえに，t の方程式 ② が異なる 3 個の実数解をもつような p の値の範囲を求めればよい。

$g(t)=-2t^3+6t^2-8$ とおくと　$g'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$

$g'(t)=0$ とすると　$t=0,\ 2$

$g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	-8	↗	0	↘



よって，$y=g(t)$ のグラフは右の図のようになる。

このグラフと直線 $y=p$ の共有点の個数が，方程式 ② の異なる実数解の個数に一致する。

したがって，求める p の値の範囲は　$-8<p<0$

8．［福岡大］

$\log_5 x=a$ とおくと，$1\leqq x\leqq 125$ であるから　$0\leqq a\leqq 3$

$\log_5 x^2=2\log_5 x$ から，y を a の式で表すと

$$y=a^2-\frac{2}{3}a=\left(a-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$$

よって，$a=\frac{1}{3}$ すなわち $x=5^{\frac{1}{3}}$ のとき，最小値 $^{\text{ア}}-\frac{1}{9}$ をとる。

また，$s+t=6$ から　$s=6-t$

$s>0$ であるから　$6-t>0$　すなわち　$t<6$

$t>0$ と合わせて　$0<t<6$

このとき

$\log_3 s+2\log_3 t=\log_3(6-t)+2\log_3 t$

$=\log_3(6-t)+\log_3 t^2=\log_3(6-t)t^2=\log_3(-t^3+6t^2)$ ……①

底3は1より大きいから，$-t^3+6t^2$ が最大のとき，①も最大となる。

$f(t)=-t^3+6t^2\ (0<t<6)$ とおくと　$f'(t)=-3t^2+12t=-3t(t-4)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=0,\ 4$

よって，$0<t<6$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。ゆえに，$f(t)$ は $t=4$ のとき最大値32をとる。

t	0	…	4	…	6
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	32	↘	

$t=4$ のとき $s=2$ であり，$32=2^5$ であるから

①は $s=2$，$t=4$ で最大値 $^{\text{イ}}5\log_3 2$ をとる。

9．［福岡大改］

$f(x)=x^2+ax+a$，$g(x)=-2x^2+x+1$ とおく。

$f'(x)=2x+a$，　$g'(x)=-4x+1$

共有点Aの x 座標を t とおくと，点Aでの y 座標，および点Aにおける接線の傾きが等しいから　$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$

すなわち　$t^2+at+a=-2t^2+t+1$，

$2t+a=-4t+1$

整理して　$3t^2+(a-1)t+a-1=0$ ……①

$a=-6t+1$ ……②

②を①に代入して a を消去すると　$3t^2-6t^2-6t=0$

$t(t+2)=0$

したがって　$t=0,\ -2$

点Aの y 座標は，$t=0$　のとき　$y=1$

$t=-2$ のとき　$y=-2\cdot(-2)^2-2+1=-9$

よって，点Aの座標は　$(0,\ 1)$，$(-2,\ -9)$

10．［立命館大］

放物線 P_1：$y=x^2-6x+9$ の $x=a$ における接線の方程式は，$y'=2x-6$ より

$y=(2a-6)(x-a)+a^2-6a+9$

よって　$y=(^{\text{ア}}2a-6)x+(^{\text{イ}}-a^2+9)$ ……①

また，放物線 P_2：$y=-x^2+2x-1$ の $x=b$ における接線の方程式は，$y'=-2x+2$

より　$y=(-2b+2)(x-b)-b^2+2b-1$

よって　$y=(^{\text{ウ}}-2b+2)x+(^{\text{エ}}b^2-1)$ ……②

①と②が一致するとき

$$\begin{cases}2a-6=-2b+2 & \cdots\cdots③\\ -a^2+9=b^2-1 & \cdots\cdots④\end{cases}$$

③より　$b=4-a$ ……⑤

⑤を④に代入して　$-a^2+9=(4-a)^2-1$　整理すると　$a^2-4a+3=0$

よって　$(a-1)(a-3)=0$　ゆえに　$a=1,\ 3$

$a=1$ のとき接線の方程式は①に代入して　$y=-^{\text{オ}}4x+^{\text{カ}}8$

$a=3$ のとき接線の方程式は①に代入して　$y=^{\text{キ}}0$

11．［中央大］

(1)　$f'(x)=3x^2+6ax+3(2a-1)=3(x+1)(x+2a-1)$

$f(x)$ が極大値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつことである。

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ -2a+1$

よって，求める条件は　$-1\neq -2a+1$　すなわち　$a\neq 1$

(2)　[1]　$a<1$ のとき

$-1<-2a+1$ となるから，

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	…	-1	…	$-2a+1$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値は

$f(-1)=-1+3a-6a+3-5$

$=-3a-3$

条件から　$-3a-3\geqq 3$　よって　$a\leqq -2$

これは $a<1$ を満たす。

[2]　$a>1$ のとき

$-2a+1<-1$ となるから，

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	…	$-2a+1$	…	-1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値は

$f(-2a+1)=(-2a+1)^3+3a(-2a+1)^2+3(2a-1)(-2a+1)-5$

$=4a^3-12a^2+9a-7$

条件から　$4a^3-12a^2+9a-7\geqq 3$

よって　$(2a-5)(2a^2-a+2)\geqq 0$

ここで，$2a^2-a+2=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$ であるから　$2a-5\geqq 0$

ゆえに　$a\geqq\frac{5}{2}$　これは，$a>1$ を満たす。

[1]，[2] から，求める a の値の範囲は　$a\leqq -2,\ \frac{5}{2}\leqq a$

12．［琉球大］

(1)　$f'(x)=3x^2+6ax+15=3(x^2+2ax+5)$

$f(x)$ が極大値，極小値をともにもつ条件は，$f'(x)$ の符号が正から負に変わる x の値と，負から正に変わる x の値が存在することである。

すなわち，2次方程式 $x^2+2ax+5=0$ が異なる2つの実数解をもつことであるから，

$x^2+2ax+5=0$ の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=a^2-5>0$

よって　$a<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<a$

(2)　$x^2+2ax+5=0$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$\alpha+\beta=-2a$，$\alpha\beta=5$

また　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2a)^2-2\cdot5=4a^2-10$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=-2a\{(4a^2-10)-5\}=-2a(4a^2-15)$

よって，$f(x)$ の極大値と極小値の和は

$(\alpha^3+3a\alpha^2+15\alpha)+(\beta^3+3a\beta^2+15\beta)$

$=(\alpha^3+\beta^3)+3a(\alpha^2+\beta^2)+15(\alpha+\beta)$

$=-2a(4a^2-15)+3a(4a^2-10)+15\cdot(-2a)$

$=-8a^3+30a+12a^3-30a-30a$

$=4a^3-30a$

(3)　$4a^3-30a=-18$ より　$2a^3-15a+9=0$

ゆえに　$(a+3)(2a^2-6a+3)=0$　よって　$a=-3,\ \frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

(1) より，$a<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<a$ であるから　$a=-3,\ \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

13．［明治薬科大］

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ から，相加平均・相乗平均の大小関係により

$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

等号成立は，$2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のときである。

よって，t のとりうる値の範囲は　$^{\text{ア}}t\geqq 2$

$(2^x+2^{-x})^3=8^x+8^{-x}+3(2^x+2^{-x})$ であるから

$8^x+8^{-x}=(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})=t^3-3t$

ゆえに　$y=(t^3-3t)-12t+1=t^3-15t+1$

$f(t)=t^3-15t+1$ とおくと　$f'(t)=3t^2-15=3(t^2-5)$

$t\geqq 2$ であるから，$f'(t)=0$ とすると　$t=\sqrt{5}$

$t\geqq 2$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	2	…	$\sqrt{5}$	…
$f'(t)$		−	0	+
$f(t)$		↘	$1-10\sqrt{5}$	↗

$t=\sqrt{5}$ のとき　$2^x+2^{-x}=\sqrt{5}$

両辺に 2^x を掛けて　$(2^x)^2-\sqrt{5}\cdot2^x+1=0$

よって　$2^x=\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$　ゆえに　$x=\log_2\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$

よって，y は $t=\sqrt{5}$ すなわち $x=\log_2\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$ のとき最小値 $^{\text{イ}}1-10\sqrt{5}$ をとる。

14. ［駒澤大］

(1)　$\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$=$ ア$-4\sin^3\theta+$ イ$3\sin\theta$

よって　$y=\sin 3\theta+\dfrac{3}{2}\cos 2\theta+3\sin\theta-\dfrac{1}{2}$

$=-4\sin^3\theta+3\sin\theta+\dfrac{3}{2}(1-2\sin^2\theta)+3\sin\theta-\dfrac{1}{2}$

$=-4\sin^3\theta-$ ウ$3\sin^2\theta+$ エ$6\sin\theta+$ オ1

(2)　$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より　カ$-1\leqq t\leqq$ キ1

$y=f(t)=-4t^3-3t^2+6t+1$

$f'(t)=$ ク$-12t^2-$ ケ$6t+$ コ$6=-6(t+1)(2t-1)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=-1,\ \dfrac{1}{2}$

$-1\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-4	↗	$\frac{11}{4}$	↘	0

よって，$f(t)$ は $t=$ サ-1 で最小値 シ-4，$t=\dfrac{ス1}{セ2}$ で最大値 $\dfrac{ソ11}{タ4}$ をとる。

(3)　$t=-1$ のとき，$\sin\theta=-1$ であり，$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ であり，$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

したがって，y は $\theta=\dfrac{チ3}{ツ2}\pi$ で最小値 -4，$\theta=\dfrac{\pi}{テ6},\ \dfrac{ト5}{ナ6}\pi$ で最大値 $\dfrac{11}{4}$ をとる。

15. ［広島工業大］

(1)　$f(x)=1$ から　$x^3-3x^2-9x+1=1$

よって　$x^3-3x^2-9x=0$　　ゆえに　$x(x^2-3x-9)=0$

これを解いて　$x=0,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$

(2)　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

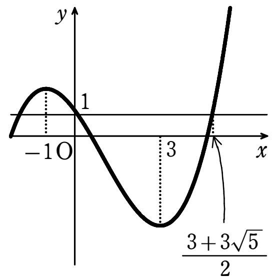
$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$x=-1$ で極大値 $f(-1)=6$，$x=3$ で極小値 $f(3)=-26$

(3)　$f(0)=1$

(1)，(2) から，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



[1]　$0<a<3$ のとき

$x=0$ で最大値 1，

$x=a$ で最小値 a^3-3a^2-9a+1

[2]　$3\leqq a<\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$ のとき

$x=0$ で最大値 1，$x=3$ で最小値 -26

[3]　$a=\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$ のとき

$x=0,\ \dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$ で最大値 1，$x=3$ で最小値 -26

[4]　$a>\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$ のとき

$x=a$ で最大値 a^3-3a^2-9a+1，$x=3$ で最小値 -26

16. ［東京都市大］

$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-ax^2+a$ とすると　$f'(x)=2x^2-2ax=2x(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ a$

$a=0$ のとき，与えられた 3 次方程式は $\dfrac{2}{3}x^3=0$ となり，異なる 3 個の実数解をもたない。

よって　$a\neq0$

$a\neq0$ のとき，与えられた 3 次方程式が 3 個の実数解をもつための条件は

$f(0)f(a)<0$

ゆえに　$a\left(-\dfrac{1}{3}a^3+a\right)<0$

よって　$a^2\left(-\dfrac{1}{3}a^2+1\right)<0$

$a\neq0$ であるから　$-\dfrac{1}{3}a^2+1<0$

ゆえに　$a<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<a$

これは $a\neq0$ を満たす。

17. ［北里大］

(1)　真数は正であるから　$4x-x^2>0,\ \ 12-2x>0,\ \ 4-x>0$

それぞれ $0<x<4$，$x<6$，$x<4$ となるから，関数 $f(x)$ の定義域は　$0<x<4$

(2)　$f(x)=\log_2(4x-x^2)+2\log_2(12-2x)-\log_2(4-x)-\log_2 2$

$=\log_2\dfrac{x(4-x)(12-2x)^2}{2(4-x)}=\log_2\{2x(x-6)^2\}$

$=\log_2(2x^3-24x^2+72x)$

よって　$g(x)=2x^3-24x^2+72x$

(3)　$f(x)=\log_2 g(x)$ とすると，底 2 は 1 より大きいから，$g(x)$ が最大となるとき $f(x)$ は最大となる。

(2) から　$g'(x)=6x^2-48x+72=6(x-2)(x-6)$

$g'(x)=0$ とすると　$x=2,\ 6$

$0<x<4$ における $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	64	↘	

よって，$g(x)$ は $0<x<4$ において $x=2$ で最大値 64 をとる。

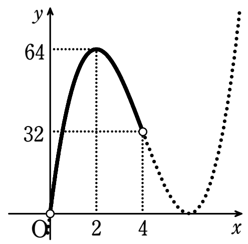
したがって，$f(x)$ は $0<x<4$ において $x=2$ で最大値 $\log_2 64=6$ をとる。

(4)　$f(x)=k$ から　$\log_2 g(x)=k$　　ゆえに　$g(x)=2^k$

$f(x)=k$ の実数解の個数と，$g(x)=2^k$ の実数解の個数は一致する。

また，$g(x)=2^k$ の実数解の個数は，曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=2^k$ の共有点の個数に一致する。

(3) から，$y=g(x)$ のグラフは右の図のようになる。



ゆえに，$0<x<4$ において，曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=2^k$ の共有点がちょうど 2 個となるような k の値の範囲は

$32<2^k<64$　　すなわち　$2^5<2^k<2^6$

よって　$5<k<6$