No.6　演習プリント　　解答

名前（　　　　　　　　　　）

1. (1)　$\overrightarrow{OE}=(1-a)\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}$

$=(1-a)(1,\ 0,\ 0)+a(0,\ 1,\ 1)=(1-a,\ a,\ a)$

$\overrightarrow{OF}=(1-a)\overrightarrow{OC}+a\overrightarrow{OD}$

$=(1-a)(1,\ 0,\ 1)+a(-2,\ -1,\ -2)=(1-3a,\ -a,\ 1-3a)$

よって　$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=({}^{\text{アイ}}-2a,\ {}^{\text{ウエ}}-2a,\ {}^{\text{オ}}1-{}^{\text{カ}}4a)$

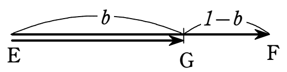
$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{AB}$ のとき　$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

ここで，$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 1,\ 1)$ であるから　$-2a\cdot(-1)-2a\cdot1+(1-4a)\cdot1=0$

これを解いて　$a=\dfrac{{}^{\text{キ}}1}{{}^{\text{ク}}4}$

(2)　$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EG}$

ここで，EG：GF$=b:(1-b)$ であるから



$\overrightarrow{EG}=b\overrightarrow{EF}$

$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，(1) から　$\overrightarrow{OE}=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$，　$\overrightarrow{EF}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

よって　$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+b\overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)+b\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

$=\left(\dfrac{{}^{\text{ケ}}3-{}^{\text{コ}}2b}{{}^{\text{サ}}4},\ \dfrac{{}^{\text{シ}}1-{}^{\text{ス}}2b}{4},\ \dfrac{{}^{\text{セ}}1}{4}\right)$

(3)　点 H は直線 BC 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{BH}=s\overrightarrow{BC}$ と表される。

$\overrightarrow{BC}=(1,\ -1,\ 0)$ であるから

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{BC}$

$=(0,\ 1,\ 1)+s(1,\ -1,\ 0)=(s,\ 1-s,\ 1)$　…… ①

また，点 H は直線 OG 上にあるから，実数 t を用いて $\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OG}$ と表される。

よって，(2) から　$\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OG}=\left(\dfrac{3-2b}{4}t,\ \dfrac{1-2b}{4}t,\ \dfrac{1}{4}t\right)$　…… ②

①，② が一致するから

$s=\dfrac{3-2b}{4}t$ …… ③，　$1-s=\dfrac{1-2b}{4}t$ …… ④，　$1=\dfrac{1}{4}t$ …… ⑤

⑤ から　$t={}^{\text{テ}}4$

これを ③，④ に代入して　$s=3-2b$，　$1-s=1-2b$

辺々を加えて　$1=4-4b$　　よって　$b=\dfrac{{}^{\text{ソ}}3}{{}^{\text{タ}}4}$

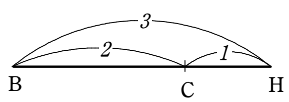
このとき　$s=3-2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{{}^{\text{チ}}3}{{}^{\text{ツ}}2}$

① に代入して　$\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{3}{2},\ 1-\dfrac{3}{2},\ 1\right)=\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

よって，点 H の座標は　$\left(\dfrac{{}^{\text{ト}}3}{{}^{\text{ナ}}2},\ \dfrac{{}^{\text{ニヌ}}-1}{2},\ {}^{\text{ネ}}1\right)$

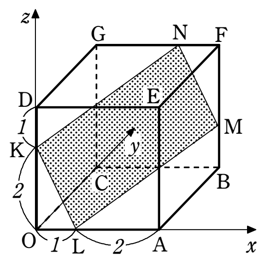
また，このとき，$\overrightarrow{BH}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ であるから

BC：BH＝2：3



したがって，点 H は線分 BC を ${}^{\text{ノ}}3:1$ に外分する。

2. (1)　L(1，0，0)，K(0，0，2) であるから



$\overrightarrow{LK}=(0-1,\ 0-0,\ 2-0)$

$=({}^{\text{アイ}}-1,\ {}^{\text{ウ}}0,\ {}^{\text{エ}}2)$

四角形 KLMN が平行四辺形であるから

$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{MN}$　（${}^{\text{オ}}$③）

M(3，3，s)，N(t，3，3) と表すと，

$\overrightarrow{MN}=(t-3,\ 0,\ 3-s)$ であるから

$-1=t-3,\ 2=3-s$

ゆえに　$s={}^{\text{カ}}1,\ t={}^{\text{キ}}2$

よって　M(3，3，1)，N(2，3，3)

したがって，N は FG を $1:{}^{\text{ク}}2$ に内分する。

ここで　$\overrightarrow{LM}=(3-1,\ 3-0,\ 1-0)=(2,\ 3,\ 1)$

よって　$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM}=(-1)\times2+0\times3+2\times1={}^{\text{ケ}}0$，

$|\overrightarrow{LK}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\sqrt{{}^{\text{コ}}5}$，

$|\overrightarrow{LM}|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{{}^{\text{サシ}}14}$

$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM}=0$ より $\overrightarrow{LK}\perp\overrightarrow{LM}$ であるから，四角形 KLMN は長方形であり，その面積は

$|\overrightarrow{LK}|\times|\overrightarrow{LM}|=\sqrt{5}\times\sqrt{14}=\sqrt{{}^{\text{スセ}}70}$

(2)　P(p，q，r) とおく。

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{LK}$，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{LM}$ であるから　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LM}={}^{\text{ソ}}0$

よって　$-p+2r=2p+3q+r=0$　　ゆえに　$p={}^{\text{タ}}2r$，$q=\dfrac{{}^{\text{チツ}}-5}{{}^{\text{テ}}3}r$

また　$\overrightarrow{PL}=(1-p,\ -q,\ -r)=\left(1-2r,\ \dfrac{5}{3}r,\ -r\right)$

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{PL}$ であるから　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PL}=0$

よって　$2r\times(1-2r)+\left(-\dfrac{5}{3}r\right)\times\dfrac{5}{3}r+r\times(-r)=0$

整理すると　$35r^2-9r=0$　　すなわち　$r(35r-9)=0$

$r\fallingdotseq0$ であるから　$r=\dfrac{{}^{\text{ト}}9}{{}^{\text{ナニ}}35}$

ゆえに　$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(2r)^2+\left(-\dfrac{5}{3}r\right)^2+r^2}=\sqrt{4r^2+\dfrac{25}{9}r^2+r^2}$

$=\sqrt{\dfrac{70}{9}r^2}=\dfrac{r}{3}\sqrt{70}=\dfrac{9}{35}\times\dfrac{1}{3}\sqrt{70}=\dfrac{{}^{\text{ヌ}}3\sqrt{{}^{\text{ネノ}}70}}{{}^{\text{ハヒ}}35}$

したがって，三角錐 OLMN の体積は

$\dfrac{1}{3}\times\triangle\text{LMN}\times|\overrightarrow{OP}|=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{70}\right)\times\dfrac{3\sqrt{70}}{35}={}^{\text{フ}}1$