第12講の解答

12-1

(1) 第3項が3、第8項が-729となる等比数列$\{a_n\}$について、一般項a_n、および初項から第n項までの和S_nを求めよ。ただし、$\{a_n\}$の各項は実数であるとする。

(2) 初項が-3、第4項が24である等比数列がある。この数列の初項から第n項までの和が初めて100を超えるとき、nの値を求めよ。ただし、この数列の各項は実数であるとする。

$\boxed{\text{アイテム}}$

$\{a_n\}$：初項a，公比rの等比数列

一般項 $a_n = ar^{n-1}$

a_1からa_nまでの和をS_nとすると，$r \neq 1$のとき，

和 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ ←nは項数 重要

$r=1$のとき，

$S_n = a+a+a+\cdots+a = na$ ←aがnコ

(1) $\boxed{\text{解答}}$

$\{a_n\}$の初項をa，公比をrとする。

$a_3 = 3$より，$ar^2 = 3$ …①

$a_8 = -729$より，$ar^7 = -729$ …②

②÷①より，

$r^5 = -243$　∴ $r = -3$

$r=-3$を①に代入すると，

$9a = 3$　∴ $a = \frac{1}{3}$

よって，

$a_n = \frac{1}{3}\cdot(-3)^{n-1}$

また，

$S_n = \dfrac{\frac{1}{3}\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}$

$= \frac{1}{12}\{1-(-3)^n\}$

(2)

(方針)

$S_n > 100$をみたす最小のnを求める。

今回は，解けないので，当てはめて探す。

$\boxed{\text{解答}}$

この数列を$\{a_n\}$とし，

$\{a_n\}$の公比をrとする。

$a_4 = 24$より，$-3r^3 = 24$

$r^3 = -8$

∴ $r = -2$

a_1からa_nまでの和をS_nとすると，

$S_n = \dfrac{\cancel{-3}^{\,1}\{1-(-2)^n\}}{\cancel{1-(-2)}} = (-2)^n - 1$

$S_n > 100$のとき

$(-2)^n - 1 > 100$

$(-2)^n > 101$ …①

$1 \leqq n \leqq 6$のとき，$(-2)^n \leqq 64$

$(-2)^7 = -128$，$(-2)^8 = 256$

よって

①をみたす最小のnは，$n=8$より，

求めるnは，$n=8$

12-2

(1) 等比数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとする。$S_{10}=2$, $S_{20}=6$であるとき、S_{30}の値を求めよ。

(2) 異なる3つの数3, a, bがあり、数列3, a, bは等比数列をなし、数列b, 3, aは等差数列をなすとき、$a = \boxed{\text{アイ}}$, $b = \boxed{\text{ウエ}}$である。

(1) $\boxed{\text{ポイント}}$ $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$を使うときは，$r \neq 1$でなければならないので，

$r=1$ or $r \neq 1$で場合分けがいる。

ちなみに，$a+ar+ar^2+\cdots$のように書き並べて書くなら，

$r=1$ or $r \neq 1$で場合分けは不要。

$\boxed{\text{解答}}$

$r=1$のとき，$\{a_n\}$：$a, a, a, \cdots$

$S_{10}=2$，$S_{20}=6$より，$10a=2$，$20a=6$

この2式を同時にみたすaは存在しないので，不適

$r \neq 1$のとき，

$S_{10}=2$より，$\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 2$ …①

$S_{20}=6$より，$\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1} = 6$ …②

②より，

$\dfrac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 6$　←　$r^{20}-1 = (r^{10})^2 - 1^2$

$2(r^{10}+1) = 6$　(∵①)

∴ $r^{10} = 2$

よって，

$S_{30} = \dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}$　←　$r^{30}-1 = (r^{10})^3 - 1^3$

$= \dfrac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1}$

$= 2(4+2+1)$　(∵①)

$= 14$

(2)は省略