$f'(x)=g'(x) \Rightarrow f(x)=g(x)$ は成り立つか？

1. 「$f(x)=g(x) \Longrightarrow f'(x)=g'(x)$」は、真

2. 「$f'(x)=g'(x) \Longrightarrow f(x)=g(x)$」は、偽

（反例：$f(x)=x^3-3x$, $g(x)=x^3-3x+2$）

$f'(x)=g'(x)=3x^2-3$

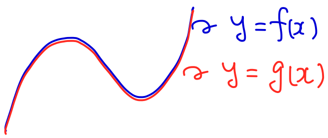
1, 2より、$f(x)=g(x) \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} f'(x)=g'(x)$

これをグラフでとらえてみましょう。

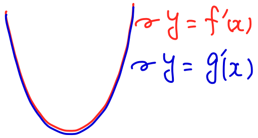
イメージしやすいように、$\begin{cases} f(x),\ g(x) : 3\text{次関数} \\ f'(x),\ g'(x) : 2\text{次関数} \end{cases}$ で考えてみます。

$f(x)=g(x)$ が任意のxで成り立つとき、

$y=f(x)$と$y=g(x)$のグラフが一致して重なっている状態

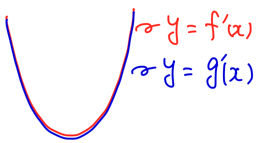


$\overset{\bigcirc}{\Longrightarrow}$

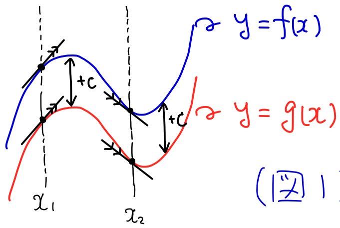


$f'(x)=g'(x)$ が任意のxで成り立つとき、

$f(x)$と$g(x)$は定数項のずれがあってもよい。



$\overset{\times}{\Longrightarrow}$



(図1)

$f'(x)=g'(x)$ のとき、

両辺をxで積分すると、

$\int f'(x)dx=\int g'(x)dx$

$\therefore f(x)=g(x)+C$ 定数項のずれ

定数項のずれがあっても、

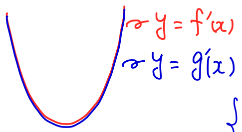
任意のxで、接線の傾きは等しい

「$f'(x)=g'(x) \Longrightarrow f(x)=g(x)$」が真となるためには、

$C=0$となるような条件が追加として必要になる。

「$f'(x)=g'(x)$ かつ $f(a)=g(a) \Longrightarrow f(x)=g(x)$」…（＊）は真

追加

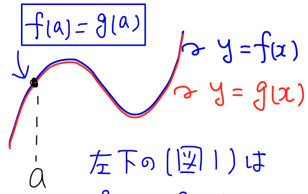


かつ $f(a)=g(a)$

・$x=a$でのy座標が等しい

・aの値は何でもよい

$\overset{\bigcirc}{\Longrightarrow}$



左下の(図1)は

$f(a)\neq g(a)$

（＊）の証明

$f'(x)=g'(x)$より、$f(x)=g(x)+C$ …①

①に$x=a$を代入すると、$f(a)=g(a)+C$

$f(a)=g(a)$より、$C=0$

よって、①より、$f(x)=g(x)$ （終）

☆ 「$f(x)=g(x) \Longleftrightarrow f'(x)=g'(x)$ かつ $f(a)=g(a)$」…（☆）

「（☆）を使った例」

$$\underbrace{\boxed{\int_k^x f(t)dt}}_{F(x)} = \underbrace{\boxed{x^3-x^2}}_{G(x)}$$

xで微分

xに（上端）=（下端）の値を代入

（kの値も求まり、都合が良い）

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\boxed{f(x)}}_{F'(x)} = \underbrace{\boxed{3x^2-2x}}_{G'(x)} \quad \text{かつ} \quad \underbrace{\boxed{\int_k^k f(t)dt}}_{F(k)} = \underbrace{\boxed{k^3-k^2}}_{G(k)}$$

$0=k^3-k^2$

$k^2(k-1)=0$

$k=0, 1$

kの値が求まる