S③ 31番の解答

ア. $\overrightarrow{OA}=(1,1,-1)$ より、$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3}$

イ. $\overrightarrow{OP}=\left(\cos t, \sin t, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ より、

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+\frac{6}{4}}=\sqrt{1+\frac{6}{4}}=\underline{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

ウ. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\underline{\sin t+\cos t-\frac{\sqrt{6}}{2}}$

エ. $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|}$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$0\leqq t<2\pi$ より、$\frac{\pi}{4}\leqq t+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ …①

θが最小となるのは、$\cos\theta$が最大のときである。

このとき、$t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ より、$\underline{t=\frac{\pi}{4}}$

オカ. $\triangle OAP$の面積をSとすると、

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot\frac{5}{2}-\left(\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=X$ とおくと、$-1\leqq X\leqq 1$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2}-\left(\sqrt{2}X-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{-2\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{15}{2}}$$

よって、

Sは $X=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、最大をとる。

このとき、

$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、①より、

$t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$ $\therefore$ $\underline{t=\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi}$