No.5　演習プリント　　　　　　　　　　　　　　　　　　名前（　　　　　　　　　　）

1．1辺の長さが1のひし形OABCにおいて，$\angle \mathrm{AOC}=120^\circ$ とする。辺ABを2：1に内分する点をPとし，直線BC上に点Qを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となるようにとる。以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。

(1)　三角形OPQの面積を求めよう。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}$ である。

実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表されるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{エ}}\,t\vec{a}+\vec{b}$ である。

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{キ}}$ であることから，$t=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

これらのことから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

よって，三角形OPQの面積 S_1 は，$S_1=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

(2)　辺BCを1：3に内分する点をRとし，直線ORと直線PQとの交点をTとする。$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表し，三角形OPQと三角形PRTの面積比を求めよう。

Tは直線OR上の点であり，直線PQ上の点でもあるので，実数 r，s を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=r\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と表すと，$r=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$，$s=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ となることがわかる。

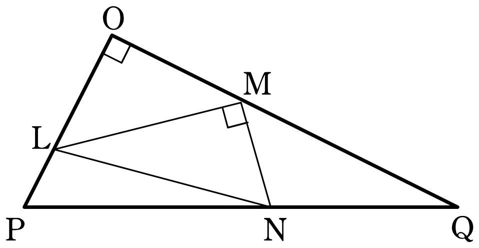
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\vec{b}$ である。

上で求めた r，s の値から，三角形OPQの面積 S_1 と，三角形PRTの面積 S_2 との比は，

$S_1：S_2=\boxed{\text{ヘホ}}：2$ である。

２．OP＝1，OQ＝2，∠POQ＝90° である三角形OPQ において，線分 OP を 2：1 に内分する点を L，線分 OQ を a：$(1-a)$ に内分する点を M とする。ただし，$0<a<1$ とする。さらに，線分 PQ 上に点 N を ∠LMN＝90° となるようにとる。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおき，PN：NQ＝b：$(1-b)$ とする。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ と $|\overrightarrow{\mathrm{ML}}|$ は a を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{p}-\boxed{\text{ウ}}\,\vec{q},\quad |\overrightarrow{\mathrm{ML}}|=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\sqrt{1+\boxed{\text{カ}}\,a^2}$$

と表される。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$ を a を用いて表そう。まず，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ は a，b を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\left(1-\boxed{\text{キ}}\right)\vec{p}+\left(\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}}\right)\vec{q}$$

と表される。$\overrightarrow{\mathrm{ML}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\boxed{\text{コ}}$ であるから，$b=\dfrac{1+\boxed{\text{サ}}\,a^2}{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}\,a}$ である。

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$ は a を用いて

$$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\frac{\boxed{\text{セ}}\left(\boxed{\text{ソ}}-a\right)}{\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}\,a}\sqrt{1+\boxed{\text{タ}}\,a^2}$$ と表される。

(3)　三角形 LMN と三角形 QOP は相似であるとする。直線 OQ と直線 LN の交点を求めよう。

$|\overrightarrow{\mathrm{ML}}|=\boxed{\text{チ}}\,|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$ であるから，$a=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$，$b=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

s を実数とし，直線 LN 上に点 R を $\overrightarrow{\mathrm{LR}}=s\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ となるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}-\frac{s}{\boxed{\text{ハ}}}\right)\vec{p}+\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}s\vec{q}$$ と表される。$s=\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ のとき，

R は，直線 OQ 上の点でもあるので，直線 OQ と直線 LN の交点となる。