マーク演習　No.8　解答

1．$t=2^x$ とおくと，① は $\dfrac{5}{t}+8t=2a$ となる．

よって　$t^2-\dfrac{a}{{}^{ア}4}t+\dfrac{{}^{イ}5}{8}=0$ …… ② となり，更に $\left(t-\dfrac{a}{8}\right)^2+\dfrac{5}{8}-\dfrac{a^2}{64}=0$

すなわち　$\left(t-\dfrac{a}{{}^{ウ}8}\right)^2+\dfrac{{}^{エオ}40-a^2}{{}^{カキ}64}=0$ と変形される．

したがって，$\dfrac{40-a^2}{64}<0$ すなわち $a>{}^{ク}2\sqrt{{}^{ケコ}10}$ のとき ② は 2 個の解をもつ．

$a=2\sqrt{10}$ のとき，② は重解 $t=\dfrac{a}{8}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ をもつ．

よって　$2^x=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ から　$x=\dfrac{1}{{}^{サ}2}(\log_2 {}^{シ}5-{}^{ス}3)$

2．$x^2-6x+12=(x-3)^2+3$ から，放物線 $y=g(x)$ の頂点は $({}^{ア}3, {}^{イ}3)$

$x^2=x^2-6x+12$ を解くと　$x=2$

よって，2 つの放物線 $y=x^2$, $y=x^2-6x+12$ は，点 $({}^{ウ}2, {}^{エ}4)$ で交わる．

$y=x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線 l の方程式は $y=2a(x-a)+a^2$ すなわち

$y={}^{オ}2ax-a^2$ である．

これが，$y=x^2-6x+12$ にも接するならば $x^2-6x+12=2ax-a^2$ すなわち

$x^2-2(a+3)x+a^2+12=0$ の左辺が完全平方であればよい．

(左辺)$=\{x-(a+3)\}^2-6a+3$ であるから　$-6a+3=0$　　ゆえに　$a=\dfrac{{}^{カ}1}{{}^{キ}2}$

このとき (左辺)$=\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2$ となるから，直線 l と放物線 $y=g(x)$, $y=f(x)$ との接点の

x 座標は，それぞれ $\dfrac{{}^{ク}7}{{}^{ケ}2}, \dfrac{1}{2}$ である．

よって，求める面積は

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{2}^{\frac{7}{2}}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2dx=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{2}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)^3\right]_{2}^{\frac{7}{2}}=\frac{{}^{コ}9}{{}^{サ}4}$$