ベクトル演習プリント　　解答

1．［関西学院大］

$|\vec{a}-2\vec{b}|=7$ から　　$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=49$

また　　$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=5^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times3^2$

$=61-4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=49$ であるから　　$61-4\vec{a}\cdot\vec{b}=49$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}={}^{ア}3$

ゆえに　　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times5^2+4\times3+3^2=121$

$|2\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ であるから　　$|2\vec{a}+\vec{b}|={}^{イ}11$

$|\vec{a}-2\vec{b}|=7$，$|2\vec{a}+\vec{b}|=11$ であるから

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})}{7\times11}=\frac{2|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2}{77}$$

$$=\frac{2\times5^2-3\times3-2\times3^2}{77}={}^{ウ}\frac{23}{77}$$

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小になる。

ここで　　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=5^2+2t\times3+t^2\times3^2$

$=9t^2+6t+25=9\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+24$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値は $\sqrt{24}={}^{エ}2\sqrt{6}$ で，そのときの t の値は ${}^{オ}t=-\frac{1}{3}$ である。

2．［国士舘大］

(1)　$2\vec{a}+\vec{b}=2(-1,\ x)+(-4,\ 3)=(-6,\ 2x+3)$

$\vec{a}-\vec{b}=(-1,\ x)-(-4,\ 3)=(3,\ x-3)$

$2\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$(2\vec{a}+\vec{b})/\!/(\vec{a}-\vec{b})$ となるのは，$2\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$ となる実数 k があるときである。

よって　　$(-6,\ 2x+3)=k(3,\ x-3)$

ゆえに　　$-6=3k$，　$2x+3=k(x-3)$

これを解いて　　$k=-2$，$x={}^{ア}\frac{3}{4}$

(2)　$(2\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$ となるとき　　$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

すなわち　$-6\times3+(2x+3)(x-3)=0$　　よって　$2x^2-3x-27=0$

ゆえに　　$(x+3)(2x-9)=0$　　したがって　$x={}^{イ}-3$，${}^{ウ}\frac{9}{2}$

3．［関西大］

$7\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ から　　$-7\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

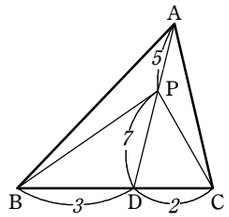
よって　　$12\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

ゆえに　　$\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{12}={}^{ア}\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

また　　$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{12}\cdot\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$

辺 BC を 3：2 に内分する点を D とすると　　$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AD}$

△ABC の面積を S とすると



$S_1=\frac{5}{12}\triangle ABD=\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{5}\cdot\triangle ABC=\frac{1}{4}S$

$S_2=\frac{7}{12}\triangle ABC=\frac{7}{12}S$

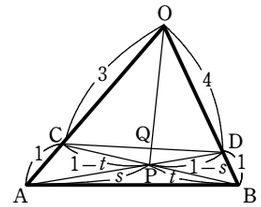
$S_3=\frac{5}{12}\triangle ADC=\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{5}\cdot\triangle ABC=\frac{1}{6}S$

よって　　$S_1:S_2:S_3=\frac{1}{4}S:\frac{7}{12}S:\frac{1}{6}S={}^{イ}3:7:2$

4．［東北大］

(1)　AP：PD$=s:(1-s)$ $(0<s<1)$，

BP：PC$=t:(1-t)$ $(0<t<1)$ とすると



$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b}$ …… ①

また $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=(1-t)\vec{b}+\frac{3}{4}t\vec{a}$ …… ②

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから

①，② より　$1-s=\frac{3}{4}t$，$\frac{4}{5}s=1-t$

これを解いて　$s=\frac{5}{8}$，$t=\frac{1}{2}$　　ゆえに，① から　$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ とすると　$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}$

$\vec{a}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OC}$，$\vec{b}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OD}$ であるから　$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{8}k\cdot\frac{4}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}k\cdot\frac{5}{4}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OC}+\frac{5}{8}k\overrightarrow{OD}$

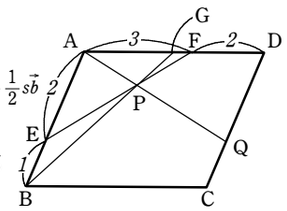
Q は線分 CD 上の点であるから　$\frac{1}{2}k+\frac{5}{8}k=1$

これを解いて　$k=\frac{8}{9}$　　ゆえに　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

5．［西南学院大］

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とする。

BP：PG$=s:(1-s)$ とすると



$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AG}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}$

EP：PF$=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{AF}=(1-t)\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+t\times\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

$=\frac{2}{3}(1-t)\vec{a}+\frac{3}{5}t\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから

$1-s=\frac{2}{3}(1-t)$，$\frac{1}{2}s=\frac{3}{5}t$

これを解いて　　$s=\frac{3}{4}$，$t=\frac{5}{8}$

よって　　$\overrightarrow{AP}={}^{ア}\frac{1}{イ4}\overrightarrow{AB}+\frac{{}^{ウ}3}{{}^{エ}8}\overrightarrow{AD}$

点 Q は直線 AP 上にあるから　　$\overrightarrow{AQ}=u\overrightarrow{AP}$ (u は実数)

ゆえに　　$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}u\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}u\overrightarrow{AD}$

点 Q は直線 CD 上にあるから　　$\frac{3}{8}u=1$　　よって　　$u=\frac{8}{3}$

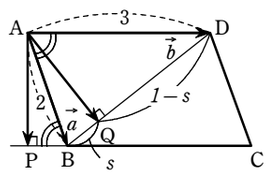
このとき　$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

ゆえに　　DQ：QC$={}^{オ}2:{}^{カ}1$

6．［香川大］

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=AB\times AD\times\cos\angle BAD=2\times3\times\frac{1}{3}=2$

(2)　点 P は直線 BC 上にあり，AD∥BC であるから



$\overrightarrow{BP}=k\vec{b}$　(k は実数)

と表される。

よって　　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\vec{a}+k\vec{b}$

AD⊥AP であるから　　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

ゆえに　　$\vec{b}\cdot(\vec{a}+k\vec{b})=0$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}+k|\vec{b}|^2=0$

ゆえに　　$2+k\cdot3^2=0$　　よって　　$k=-\frac{2}{9}$

したがって　　$\overrightarrow{AP}=\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}$

また，BQ：QD$=s:(1-s)$ とすると　　$\overrightarrow{AQ}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

BD⊥AQ であるから　　$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$　　よって　　$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}=0$

ゆえに　　$(s-1)|\vec{a}|^2+(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2=0$

よって　　$(s-1)\cdot2^2+(1-2s)\cdot2+s\cdot3^2=0$

ゆえに　　$9s-2=0$　　よって　　$s=\frac{2}{9}$

したがって　　$\overrightarrow{AQ}=\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}$

(3)　$|\overrightarrow{AP}|^2=\left|\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}\right)$

$=|\vec{a}|^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{81}|\vec{b}|^2=2^2-\frac{4}{9}\cdot2+\frac{4}{81}\cdot3^2=\frac{32}{9}$

よって　　$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$|\overrightarrow{AQ}|^2=\left|\frac{1}{9}(7\vec{a}+2\vec{b})\right|^2=\frac{1}{81}(7\vec{a}+2\vec{b})\cdot(7\vec{a}+2\vec{b})$

$=\frac{1}{81}(49|\vec{a}|^2+28\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\frac{1}{81}(49\cdot2^2+28\cdot2+4\cdot3^2)=\frac{288}{81}$

ゆえに　　$|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{\frac{288}{81}}=\frac{12\sqrt{2}}{9}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(4)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}-\left(\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}\right)=-\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}=-\frac{2}{9}(\vec{a}-2\vec{b})$

よって　　$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left|-\frac{2}{9}(\vec{a}-2\vec{b})\right|^2=\frac{4}{81}(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

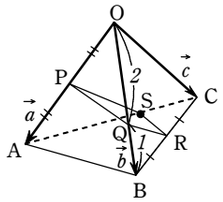
$=\frac{4}{81}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\frac{4}{81}(2^2-4\cdot2+4\cdot3^2)=\frac{4}{81}\cdot32$

ゆえに　　$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\frac{4}{81}\cdot32}=\frac{2}{9}\cdot4\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{2}}{9}$

7．［神戸大］

(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$



(2)　点 S は 3 点 P，Q，R を通る平面上にあるから

$\overrightarrow{PS}=s\overrightarrow{PQ}+t\overrightarrow{PR}$　(s，t は実数)

と表される。(1) の結果から

$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PS}$

$=\frac{1}{2}\vec{a}+s\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{2}(1-s-t)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}s+\frac{1}{2}t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}t\vec{c}$　……①

また，点 S は辺 AC 上にあるから，AS：SC$=u:(1-u)$ とすると

$\overrightarrow{OS}=(1-u)\vec{a}+u\vec{c}$　……②

と表される。

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，①，② より

$\frac{1}{2}(1-s-t)=1-u$　……③，$\frac{2}{3}s+\frac{1}{2}t=0$　……④，$\frac{1}{2}t=u$　……⑤

⑤ から　$t=2u$　　よって，④ から　$s=-\frac{3}{2}u$

ゆえに，③ から　$1+\frac{3}{2}u-2u=2-2u$

これを解いて　$u=\frac{2}{3}$　　よって　$s=-1$，$t=\frac{4}{3}$

ゆえに　$|\overrightarrow{AS}|:|\overrightarrow{SC}|=\frac{2}{3}:\left(1-\frac{2}{3}\right)=2:1$

(3)　$\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})$

また，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$ であるから

$|\overrightarrow{QS}|^2=\frac{1}{3^2}|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\frac{1}{9}\left(1^2+4\cdot1^2+4\cdot1^2-4\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9}$

したがって　$|\overrightarrow{QS}|=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

8．［金沢工業大改］

(1)　$\overrightarrow{AB}=(0,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\ -1,\ 2)$ であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\cdot1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot2=3$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

よって　$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0<\angle BAC<\pi$ であるから　$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$

(2)　Hは平面ABC上より，　$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおける。

よって、$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ より，

$\overrightarrow{OH}=(1,\ -2,\ -1)+s(0,\ -1,\ 1)+t(1,\ -1,\ 2)$

$=(t+1,\ -s-t-2,\ s+2t-1)$　……①

OH⊥ (平面 ABC) であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

よって　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ から　$(t+1)\cdot0+(-s-t-2)\cdot(-1)+(s+2t-1)\cdot1=0$

ゆえに　$2s+3t=-1$　……②

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ から　$(t+1)\cdot1+(-s-t-2)\cdot(-1)+(s+2t-1)\cdot2=0$

ゆえに　$3s+6t=-1$　……③

②，③ から　$s=-1$，$t=\frac{1}{3}$

$s=-1$，$t=\frac{1}{3}$ を ① に代入して

$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{1}{3}+1,\ 1-\frac{1}{3}-2,\ -1+\frac{2}{3}-1\right)=\left(\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{4}{3}(1,\ -1,\ -1)$

よって　$H\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$

(3)　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$OH=|\overrightarrow{OH}|=\frac{4}{3}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

四面体 OABC の体積は

$\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot OH=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}$

9．［大阪府立大］

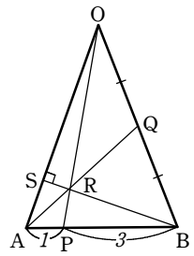
(1)　点 P は辺 AB を 1：3 に内分するから

$\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

点 R は直線 OP 上にあるから，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OP}$　(k は実数) とすると

$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}=\frac{3}{4}k\vec{a}+\left(\frac{1}{2}k\right)\frac{1}{2}\vec{b}$

$=\frac{3}{4}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{OQ}$



点 R は直線 AQ 上にあるから　$\frac{3}{4}k+\frac{1}{2}k=1$

よって　$k=\frac{4}{5}$　　ゆえに　$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$

(2)　(1) から　$\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{4}{5}\vec{b}$

点 S は直線 BR 上にあるから，$\overrightarrow{BS}=m\overrightarrow{BR}$　(m は実数) とすると

$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{BR}=\frac{3}{5}m\vec{a}+\left(1-\frac{4}{5}m\right)\vec{b}$

点 S は辺 OA 上にあるから　$1-\frac{4}{5}m=0$　　よって　$m=\frac{5}{4}$

このとき　$\overrightarrow{BS}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BR}=\frac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}$

(3)　$\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{OA}$ であるから　$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　　ゆえに，(2) から　$\frac{3}{4}|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}|=1$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{4}$

(4)　(3) から

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{8}$

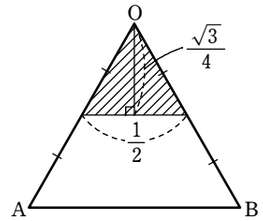
10．［摂南大］

定数 s，t が $0\leqq s+t\leqq\frac{1}{2}$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ を満たして変化するとき

$\overrightarrow{OP}=2s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$，

$0\leqq2s+2t\leqq1$，$2s\geqq0$，$2t\geqq0$

このとき，点 P の存在範囲は右の図の斜線部分であるから，その面積は



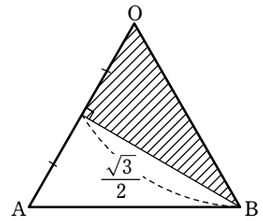
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{{}^{ア}3}}{{}^{イ}16}$

定数 s，t が $0\leqq2s+t\leqq1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ を満たして変化するとき

$\overrightarrow{OP}=2s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+t\overrightarrow{OB}$，

$0\leqq2s+t\leqq1$，$2s\geqq0$，$t\geqq0$

このとき，点 P の存在範囲は右の図の斜線部分であるから，その面積は



$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{{}^{ウ}3}}{{}^{エ}8}$

11．［早稲田大］

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

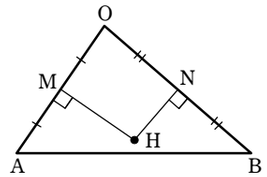
辺 OA，辺 OB の中点をそれぞれ M，N とする。

ただし，三角形 OAB は直角三角形ではないから

M≠H，N≠H

H は三角形 OAB の外心であるから

OA⊥MH，OB⊥NH



$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (s，t は実数) とする。

OA⊥MH より，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MH}=0$ であるから

$\vec{a}\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OM})=0$

よって　$\vec{a}\cdot\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+t\vec{b}\right\}=0$　……①

OB⊥NH より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{NH}=0$ であるから

$\vec{b}\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{ON})=0$

よって　$\vec{b}\cdot\left\{s\vec{a}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\vec{b}\right\}=0$　……②

ここで　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

ゆえに　$6^2=5^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{2}$

ゆえに，① から　$\left(s-\frac{1}{2}\right)\times4^2+t\times\frac{5}{2}=0$

よって　$32s+5t=16$　……③

また，② から　$s\times\frac{5}{2}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\times5^2=0$

ゆえに　$s+10t=5$　……④

③，④ から　$s=\frac{3}{7}$，$t=\frac{16}{35}$

よって　$\overrightarrow{OH}=\frac{{}^{ア}3}{{}^{イ}7}\overrightarrow{OA}+\frac{{}^{ウ}16}{{}^{エ}35}\overrightarrow{OB}$

ベクトル演習プリント　　解答

12．［星薬科大］

P$(p,\ 0,\ 0)$ とする。

直線 ℓ の方向ベクトル $\vec{d}$ は

$$\vec{d}=(-3,\ 2,\ -1)-(-1,\ 3,\ -2)=(-2,\ -1,\ 1)$$

であるから，Q$(x,\ y,\ z)$ とすると，t を実数として

$$(x,\ y,\ z)=(-1,\ 3,\ -2)+t(-2,\ -1,\ 1)$$
$$=(-1-2t,\ 3-t,\ -2+t)$$

よって　$\mathrm{PQ}^2=(-1-2t-p)^2+(3-t)^2+(-2+t)^2$

$$=(-1-2t-p)^2+2t^2-10t+13$$
$$=(-1-2t-p)^2+2\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

ゆえに，PQ^2 は $-1-2t-p=0$ かつ $t=\frac{5}{2}$，すなわち $t=\frac{5}{2}$ かつ $p=-6$ のとき，最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

$\mathrm{PQ}>0$ であるから，このとき PQ も最小となる。

よって，距離 PQ は，

$$\mathrm{P}(-{}^{ア}6,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\left(-{}^{イ}6,\ \frac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}2},\ \frac{{}^{オ}1}{{}^{カ}2}\right)$$

のとき，最小値 $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{{}^{キ}2}}{{}^{ク}2}$ をとる。

13．［横浜国立大］

(1)　$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ から　$|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$

両辺を 2 乗すると　$|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=16|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

すなわち　$4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=16|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であるから　$4+12\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9=16$

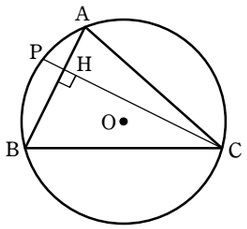
よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{4}$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=1-2\times\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\geqq 0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)　$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}=t:1-t$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



また　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$=\left(\frac{3}{2}-t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{3}{4}+t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\mathrm{AB}\perp\mathrm{CH}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$

すなわち　$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\left\{\left(\frac{3}{2}-t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{3}{4}+t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}=0$

ゆえに　$-\left(\frac{3}{2}-t\right)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\left(\frac{3}{4}+t\right)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+\left\{\left(\frac{3}{2}-t\right)-\left(\frac{3}{4}+t\right)\right\}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

すなわち　$-\left(\frac{3}{2}-t\right)+\left(\frac{3}{4}+t\right)+\left\{\left(\frac{3}{2}-t\right)-\left(\frac{3}{4}+t\right)\right\}\times\frac{1}{4}=0$

よって　$t=\frac{3}{8}$

したがって　$\mathrm{AH}:\mathrm{HB}=\frac{3}{8}:\frac{5}{8}=3:5$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{9}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{9}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{9}{8}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\frac{9}{8}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

ここで　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=1+2\times\frac{1}{4}+1=\frac{5}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\geqq 0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\frac{9}{8}\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{9\sqrt{10}}{16}$

また　$\mathrm{AH}=\frac{3}{8}\mathrm{AB}=\frac{3}{8}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{16}$，$\mathrm{HB}=\frac{5}{8}\mathrm{AB}=\frac{5}{8}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{16}$

方べきの定理により，$\mathrm{AH}\times\mathrm{HB}=\mathrm{CH}\times\mathrm{HP}$ であるから

$$\frac{3\sqrt{6}}{16}\times\frac{5\sqrt{6}}{16}=\frac{9\sqrt{10}}{16}\times\mathrm{HP}\qquad よって\quad \mathrm{HP}=\frac{\sqrt{10}}{16}$$

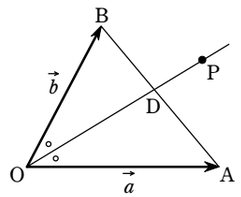
したがって，四角形 APBC の面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CP}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\left(\frac{9\sqrt{10}}{16}+\frac{\sqrt{10}}{16}\right)=\frac{5\sqrt{15}}{16}$$

14．［静岡大］

(1)　∠AOB の二等分線と線分 AB の交点を D とすると

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=|\vec{a}|:|\vec{b}|$$



よって，点 D は線分 AB を $|\vec{a}|:|\vec{b}|$ に内分する点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$

また，点 P が直線 OD 上にあるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad (s\ は実数)$$

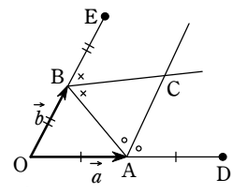
ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}\right)=\frac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

$\frac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$ は実数であるから，点 P が ∠AOB の二等分線上にあるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ となる実数 t が存在する。

(2)　直線 OA 上に，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるように D をとると，

点 C は ∠BAD の二等分線上にある。



よって，(1) から $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=u\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)$ となる実数 u が存在する。

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=u\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)$

ここで　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=5^2-2\times5+7^2=64$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=8$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\vec{a}=u\left(\frac{\vec{a}}{7}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{8}\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(1+\frac{u}{56}\right)\vec{a}+\frac{u}{8}\vec{b}$　……①

また，直線 OB 上に $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるように E をとると，点 C は ∠ABE の二等分線上にある。

よって，(1) から $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=v\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{BE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}\right)$ となる実数 v が存在する。

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=v\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}\right)$　　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\vec{b}=v\left(\frac{\vec{b}}{5}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{8}\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{v}{8}\vec{a}+\left(1+\frac{3}{40}v\right)\vec{b}$　……②

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，①，② より

$$1+\frac{u}{56}=\frac{v}{8},\quad \frac{u}{8}=1+\frac{3}{40}v$$

これを解くと　$u=14$，$v=10$

よって，$u=14$ を ① に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(1+\frac{14}{56}\right)\vec{a}+\frac{14}{8}\vec{b}=\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{7}{4}\vec{b}$

15．［岡山大］

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

与えられた等式から　$2|\vec{p}|^2-(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

これを変形すると　$|\vec{p}|^2-\left(\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{2}\right)\cdot\vec{p}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}+\left|\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2=\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|^2$$

よって　$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|=\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|$

ゆえに，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}$ で定めると，P の軌跡は C を中心とする半径 $\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|$ の円となる。

(2)　(1) から　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$ から　$|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=0$

よって　$|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2=-5\vec{a}\cdot\vec{b}$

(1) の円の半径を r とすると

$$r^2=\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|^2=\frac{1}{16}(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)$$
$$=\frac{1}{16}(-5\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{a}\cdot\vec{b})=-\frac{1}{16}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

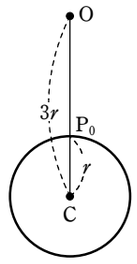
$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\left|\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2=\frac{1}{16}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)$$
$$=\frac{1}{16}(-5\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{b})=-\frac{9}{16}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=9r^2$　　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3r$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|>r$ であるから，点 O は (1) の円の外部にあり，$\mathrm{P_0}$ はこの円と線分 OC の交点である。

よって　$\mathrm{OP_0}:\mathrm{P_0C}=(3r-r):r=2:1$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



3 点 O，A，B は異なる点で同一直線上にないから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いた表し方はただ 1 通りである。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる s，t の値は

$$s=\frac{1}{6},\quad t=-\frac{1}{3}$$