漸化式　演習プリント

１． $a_{n+1}=pa_n+q^n$ 型

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+5\cdot 3^n$ によって定める。

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は $b_1=\boxed{ア}$，$b_{n+1}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}b_n+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ を満たす。

よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、

$a_n=\boxed{カ}\cdot\boxed{キ}^n-\boxed{ク}\cdot\boxed{ケ}^n$ である。

２． $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 型

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ によって定める。

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は $b_1=\boxed{ア}$，$b_{n+1}=\boxed{イ}b_n+\boxed{ウ}$ を満たす。

よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、

$a_n=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}\cdot\boxed{カ}^{n-1}-\boxed{キ}}$ である。

３． $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-2n+1$ によって定める。

$b_n=a_n-(\alpha n+\beta)$ とおいて，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるように定数 α，β の値を求めると、$\alpha=\boxed{ア}$，$\beta=\boxed{イ}$ である。このとき、数列 $\{b_n\}$ は $b_1=\boxed{ウ}$，

$b_{n+1}=\boxed{エ}b_n$ を満たす。よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより、

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、$a_n=-\boxed{オ}^{n-1}+\boxed{カ}n+\boxed{キ}$ である。

４． $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ によって定める。

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は $b_1=\boxed{ア}$，$b_{n+1}=\boxed{イ}b_n+\boxed{ウ}$ を満たす。

よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めると、$b_n=\boxed{エ}\cdot\boxed{オ}^{n-1}-\boxed{カ}$ であり、

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、$a_n=\boxed{キ}\cdot\boxed{ク}^{n-1}-\boxed{ケ}n-\boxed{コ}$ である。

５． $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ 型（重解ver.）

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=7$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ によって定める。

方程式 $x=\dfrac{4x-9}{x-2}$ の解を α とする。$b_n=\dfrac{1}{a_n-\alpha}$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は、

$b_1=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$b_{n+1}=b_n+\boxed{ウ}$ を満たす。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより、

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、$a_n=\dfrac{\boxed{エオ}n-\boxed{キ}}{\boxed{カ}n-\boxed{ク}}$ である。

６． $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ 型（異なる２解ver.）

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$ によって定める。

方程式 $x=\dfrac{4x+3}{x+2}$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とする。$b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと、$\{b_n\}$ の一般項は

$b_n=\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\right)^n$ であり，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\dfrac{\boxed{ウ}\cdot\boxed{エ}^n+\boxed{オ}}{\boxed{カ}^n-\boxed{キ}}$ である。

７． $a_{n+1}=pa_n{}^q$ 型

数列 $\{a_n\}$ を　$a_1=a>0$，　$a_{n+1}=16a_n{}^3$ によって定める。

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は $b_{n+1}=\boxed{ア}b_n+\boxed{イ}$ を満たす。

よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めると、$b_n=\left(\log_2 a+\boxed{ウ}\right)\cdot\boxed{エ}^{n-1}-\boxed{オ}$

であり、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、$a_n=\dfrac{\left(\boxed{カ}a\right)^{3^{n-1}}}{\boxed{キ}}$ である。

８． $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型　(3 項間漸化式　異なる２解 ver.)

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ によって定める。

$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$ を満たすように定数 p，q（$p<q$）を求めると，

$p=\boxed{アイ}$，$q=\boxed{ウ}$ である。$b_n=a_{n+1}-pa_n$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は $b_1=\boxed{エ}$，

$b_{n+1}=\boxed{オ}b_n$ を満たす。よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{カ}^n$ である。

また、$c_n=a_{n+1}-qa_n$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の場合と同様にして、数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めると、$c_n=\boxed{キク}^n$ である。

よって、数列 $\{b_n\}$ および $\{c_n\}$ の一般項を用いると、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、

$a_n=\dfrac{\boxed{ケ}^n-\left(\boxed{コサ}\right)^n}{\boxed{シ}}$ である。

９． $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型　(3 項間漸化式　重解ver.)

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}+10a_{n+1}+25a_n=0$ によって定める。

$a_{n+2}+\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}+\alpha a_n)$ が成り立つように、定数 α，β の値を求めると、

$\alpha=\boxed{ア}$，$\beta=-\boxed{イ}$ である。

$b_n=a_{n+1}+\alpha a_n$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=\boxed{エオ}\cdot\left(\boxed{カキ}\right)^{n-1}$ である。

よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\cdot n\cdot\left(\boxed{コサ}\right)^n-\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\cdot\left(\boxed{セソ}\right)^n$ である。

漸化式　演習プリント　解答

1．$a_{n+1}=pa_n+q^n$ 型

$b_1=\dfrac{a_1}{3}=1$

$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2a_n+5\cdot 3^n}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{5}{3}$

よって、$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{5}{3}$

これを変形すると　$b_{n+1}-5=\dfrac{2}{3}(b_n-5)$

また　$b_1-5=\dfrac{a_1}{3}-5=1-5=-4$

よって，数列 $\{b_n-5\}$ は初項 -4，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$b_n-5=-4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　　ゆえに　$b_n=5-4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=5\cdot 3^n-4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot 3^n=\ 5\cdot 3^n-\ 6\cdot 2^n$

2．$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 型

$b_1+1=\dfrac{1}{a_1}+1=2$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+3}{a_n}=2+\dfrac{3}{a_n}=3b_n+2$

よって、$b_{n+1}=3b_n+2$　　これを変形すると　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

したがって，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列になるから，

$b_n+1=2\cdot 3^{n-1}$　すなわち　$b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

ゆえに　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\ \dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}$

3．$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型

$b_n=a_n-(\alpha n+\beta)$ から　$a_n=b_n+\alpha n+\beta$

よって，漸化式 $a_{n+1}=2a_n-2n+1$ は

$b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(b_n+\alpha n+\beta)-2n+1$

ゆえに　$b_{n+1}=2b_n+(\alpha-2)n-\alpha+\beta+1$

よって，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるための条件は

$\alpha-2=0$　かつ　$-\alpha+\beta+1=0$

したがって　$\alpha=2$，$\beta=1$

$b_n=a_n-(2n+1)$ とおくと，$b_1=a_1-(2\cdot 1+1)=-1$であり、$b_{n+1}=2b_n$ が成り立つ。

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 -1，公比 2 の等比数列であるから

$b_n=(-1)\cdot 2^{n-1}=-2^{n-1}$

$a_n=b_n+2n+1$ であるから　$a_n=-2^{n-1}+2n+1$

4．$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型

$b_1+2=a_2-a_1+2=(3\cdot 1+4\cdot 1)-1+2=8$

$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=\{3a_{n+1}+4(n+1)\}-(3a_n+4n)$

$=3(a_{n+1}-a_n)+4=3b_n+4$　……①

よって、$b_{n+1}=3b_n+4$　　これを変形すると，$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

したがって，数列 $\{b_n+2\}$ は初項 8，公比 3 の等比数列であるから

$b_n+2=8\cdot 3^{n-1}$

よって　$b_n=8\cdot 3^{n-1}-2$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列である。

よって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot 3^{k-1}-2)$

$=1+\dfrac{8(3^{n-1}-1)}{3-1}-2(n-1)$

$=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$　……②

初項は $a_1=1$ なので，② は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

5．$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ 型（重解ver.）

$b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}-3}=\dfrac{1}{\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}-3}=\dfrac{a_n-2}{a_n-3}=\dfrac{a_n-3+1}{a_n-3}=1+\dfrac{1}{a_n-3}$

ゆえに　$b_{n+1}=b_n+1$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{1}{a_1-3}=\dfrac{1}{4}$，公差 1 の等差数列である。

よって　$b_n=\dfrac{1}{4}+(n-1)\cdot 1=n-\dfrac{3}{4}$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}+3=\dfrac{1}{n-\dfrac{3}{4}}+3=\dfrac{12n-5}{4n-3}$

6．$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ 型（異なる2解ver.）

$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\dfrac{\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}-3}{\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}+1}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{a_n-3}{a_n+1}=\dfrac{1}{5}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{a_1-3}{a_1+1}=\dfrac{1}{5}$，公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから

$b_n=\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

また，$b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$ から　$a_n=\dfrac{b_n+3}{1-b_n}$

ゆえに　$a_n=\dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+3}{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}=\ \dfrac{3\cdot 5^n+1}{5^n-1}$

7．$a_{n+1}=pa_n{}^q$ 型

2 を底として，$a_{n+1}=16a_n{}^3$ の両辺の対数をとると

$\log_2 a_{n+1}=\log_2(16a_n{}^3)$

よって　$\log_2 a_{n+1}=\log_2 16+3\log_2 a_n$

すなわち　$\log_2 a_{n+1}=3\log_2 a_n+4$

$b_n=\log_2 a_n$ より、　$b_{n+1}=3b_n+4$

これを変形して　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $b_1+2=\log_2 a+2$，公比 3 の等比数列であるから

$b_n+2=(\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}$

したがって　$b_n=(\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}-2$

$a_n=2^{b_n}$ であるから

$a_n=2^{(\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}-2}\ =\left(2^{\log_2 4a}\right)^{3^{n-1}}\cdot 2^{-2}\ =\dfrac{(4a)^{3^{n-1}}}{4}$

8．$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型　(3 項間漸化式　異なる 2 解 ver.)

$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$ から

$a_{n+2}=(p+q)a_{n+1}-pqa_n$

$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ であるから，$p+q=1$，$pq=-6$ である数 p，q を求めればよい。

p，q は 2 次方程式 $x^2-x-6=0$ の解である。

この 2 次方程式を解くと　$x=-2$，3

よって，$p<q$ より、　$p=-2$，$q=3$

$b_n=a_{n+1}+2a_n$ とおくと、$b_1=a_2+2a_1=3$

$b_{n+1}=a_{n+2}+2a_{n+1}=(a_{n+1}+6a_n)+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)=3b_n$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$　　ゆえに、　$a_{n+1}+2a_n=3^n$　……①

また、$c_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと、$c_1=a_2-3a_1=-2$

$c_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)=-2c_n$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 -2，公比 -2 の等比数列であるから

$c_n=(-2)\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$　ゆえに、$a_{n+1}-3a_n=(-2)^n$　……②

①−② から　$5a_n=3^n-(-2)^n$

したがって　$a_n=\dfrac{3^n-(-2)^n}{5}$

9．$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ 型　(3 項間漸化式　重解ver.)

$a_{n+2}+\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}+\alpha a_n)$ より、$a_{n+2}+(\alpha-\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n=0$

$a_{n+2}+10a_{n+1}+25a_n=0$ と比較すると、$\alpha-\beta=10$, $\alpha\beta=-25$

これと解くと、$\alpha=5$，$\beta=-5$

$b_n=a_{n+1}+5a_n$ であるから　$b_{n+1}=-5b_n$

また　$b_1=a_2+5a_1=5+5\cdot 1=10$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 10，公比 -5 の等比数列であるから

$b_n=\ 10\cdot(-5)^{n-1}$　　ゆえに　$a_{n+1}=-5a_n+10\cdot(-5)^{n-1}$

両辺を $(-5)^{n+1}$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{(-5)^{n+1}}=\dfrac{a_n}{(-5)^n}+\dfrac{2}{5}$

また　$\dfrac{a_1}{-5}=-\dfrac{1}{5}$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{(-5)^n}\right\}$ は初項 $-\dfrac{1}{5}$，公差 $\dfrac{2}{5}$ の等差数列であるから

$\dfrac{a_n}{(-5)^n}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}(n-1)=\dfrac{2}{5}n-\dfrac{3}{5}$

したがって　$a_n=\dfrac{{}^{カ}2}{{}^{キ}5}\cdot n\cdot(-5)^n-\dfrac{{}^{ク}3}{{}^{ケ}5}\cdot(-5)^n$