10

$C_t : x^2+y^2-4tx+2(1-t)y+\frac{7}{2}t^2-2t+1=0$

C_t は、$(x-2t)^2+(y+1-t)^2=\frac{3}{2}t^2$ より、$t>0$ から

中心 $(2t,\ t-1)$、半径 $\sqrt{\frac{3}{2}}t$ ← すみません、絶対値はなくてよいです

よって、$t=1$ のとき、中心 $(2,0)$、半径 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ //(ア,イ)

C_1 について、中心 $(2,0)$、半径 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C_2 について、中心 $(4,1)$、半径 $\sqrt{6}$ より、

すべての円 C_t に接する y 軸に平行な直線は存在しない

よって、すべての C_t に接する直線を $y=mx+n$ とおくと、

円 C_t と $y=mx+n$ が接する条件は、

$$\frac{|2mt-t+1+n|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,t$$

中心 $(2t,\ t-1)$ と直線 $mx-y+n=0$ のキョリ

$$\sqrt{2}\,|(2m-1)t+n+1|=\sqrt{3}\cdot\sqrt{m^2+1}\,t$$

両辺 0 以上より、2乗すると、

$$2\{(2m-1)t+(n+1)\}^2=3(m^2+1)t^2$$

$$2(2m-1)^2+4(2m-1)(n+1)t+2(n+1)^2=3(m^2+1)t^2+0t+0$$

隠れている

これがすべての実数 t で成り立つ条件は、

$2(2m-1)^2=3(m^2+1)\cdots$①、$n=-1$

①より、$5m^2-8m-1=0$ $\therefore m=\frac{4\pm\sqrt{21}}{5}$

よって、

求める傾きは小さい順に $\frac{4-\sqrt{21}}{5}$, $\frac{4+\sqrt{21}}{5}$ //(ウエ)

これらの傾きをもつ直線と x 軸の正の方向となす角をそれぞれ α, β とすると、

$\tan\alpha=\frac{4-\sqrt{21}}{5}$, $\tan\beta=\frac{4+\sqrt{21}}{5}$

よって、

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2\sqrt{21}}{5}\div\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$ //(オ)

(訂正)

誤 中心 $(2t,\ -t+1)$

正 中心 $(2t,\ t-1)$

$d=r$ で立てた式から訂正して下さい。

①より、$5m^2-8m-1=0$ からは、合っています。