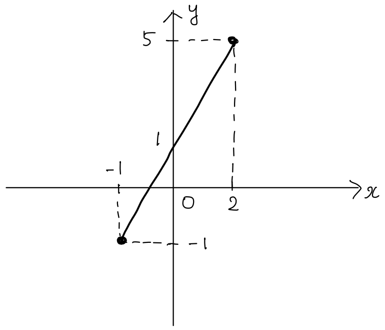
逆像法

問題１　関数 $y=2x+1\ (-1\leqq x\leqq 2)$ の値域を求めよ。

（一般的な解法）



$x=-1$ のとき、$y=-1$

$x=2$ のとき、$y=5$

よって、左図より、

$-1\leqq y\leqq 5$ //

（逆像法による解法）

$\boxed{\text{考え方}}$

$y=3$ のとき、$3=2x+1$

$\therefore x=1$ （$-1\leqq x\leqq 2$ をみたす）← { $y=3$ となるような実数 x が定義域内に存在する

$y=-3$ のとき、$-3=2x+1$

$\therefore x=-2$ （$-1\leqq x\leqq 2$ をみたさない）← { $y=-3$ となるような実数 x が定義域内に存在しない

これを一般化すれば、

$y=k$ となるような実数 x が定義域内に存在する条件で、

k のとりうる範囲、つまり、y のとりうる範囲が求まる。

（さらに言い換えると $y=2x+1\ (-1\leqq x\leqq 2)$ と $y=k$ が共有点をもつような k の範囲を求めればよい。）

$\boxed{\text{解答}}$

$y=k$ のとき、$2x+1=k \iff x=\dfrac{k-1}{2}$

$-1\leqq x\leqq 2$ より、$-1\leqq \dfrac{k-1}{2}\leqq 2$ 　$\therefore -1\leqq k\leqq 5$

よって、

$-1\leqq y\leqq 5$ //

（書き方２）$y=2x+1$ をみたす実数 x が $-1\leqq x\leqq 2$ に存在するような y のとりうる範囲を考える。

$y=2x+1 \iff x=\dfrac{y-1}{2}$

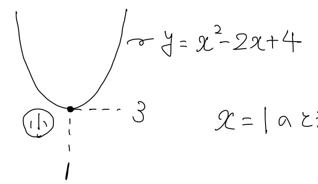
$-1\leqq x\leqq 2$ より、$-1\leqq \dfrac{y-1}{2}\leqq 2$ 　$\therefore -1\leqq y\leqq 5$ //

問題２　関数 $y=x^2-2x+4$ の最小値を求めよ。

（一般的な解法）

$y=x^2-2x+4$

$=(x-1)^2+3$



$x=1$ のとき、最小値 3 //

（逆像法による解法）

$\boxed{\text{考え方}}$

$y=4$ のとき、$4=x^2-2x+4 \iff x(x-2)=0$

$\therefore x=0,2$ ←（$y=4$ となる実数 x が存在する）

$y=-4$ のとき、$-4=x^2-2x+4 \iff x^2-2x+8=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{7}i$ ←（$y=-4$ となる実数 x が存在しない）

これを一般化すれば、

$y=k$ となるような実数 x が存在する条件で、

k のとりうる範囲、つまり、y のとりうる範囲が求まり、

最小値が求まる。

$\boxed{\text{解答}}$

$y=k$ のとき、$x^2-2x+4-k=0$ …(*)

(*)の判別式を D とすると、(*)をみたす実数 t が存在するとき、$D\geqq 0$ である。

よって、　$D/4\geqq 0$ より、$1-(4-k)\geqq 0$ 　$\therefore k\geqq 3$

したがって、$y\geqq 3$ より、最小値 3 //

（書き方２）$y=x^2-2x+4$ をみたす実数 x が存在するような y のとりうる範囲を考える。

$x^2-2x+4-y=0$ …(*) の判別式を D とすると

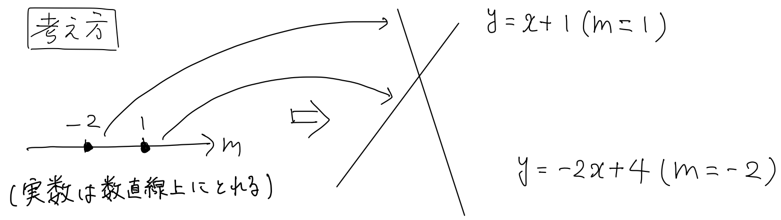
(*)をみたす実数 x が存在する条件は、$D\geqq 0$ である。

よって、$D/4\geqq 0$ より、$1-(4-y)\geqq 0 \iff y\geqq 3$

$\therefore$ 最小値 3 //

問題３　m がすべての実数値をとって変化するとき、直線 l：$y=mx+m^2$ が通過する領域を求め、図示せよ。

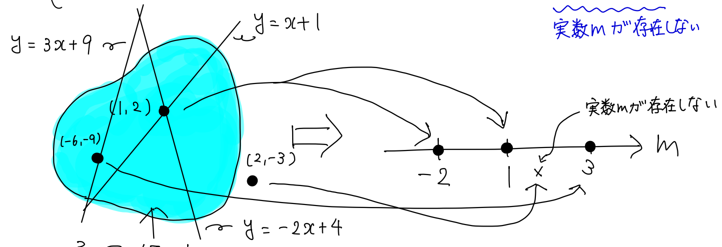
$\boxed{\text{考え方}}$



m を１つ決めると、直線が１つ定まるが、任意の実数 m を代入して、すべての直線を求めるのは困難である。

そこで、逆の発想として、通過領域内の点は、その点を通る直線が少なくとも１つ存在する、つまり、その点を通る直線を作り出す実数 m が少なくとも１つ存在する。

(*) {
- 点 $(1,2)$ を通る？ $\Longrightarrow m^2+m-2=0$ 　$\therefore m=-2,1$（実数 m が存在）← 点 $(1,2)$ を通る直線が２本ある。
- 点 $(-6,-9)$ を通る？ $\Longrightarrow m^2-6m+9=0$ 　$\therefore m=3$（実数 m が存在）← 点 $(-6,9)$ を通る直線が１本ある。
- 点 $(1,1)$ を通る？ $\Longrightarrow m^2+m-1=0$ 　$\therefore m=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$（実数 m が存在）← 点 $(1,1)$ を通る直線が２本ある。
- 点 $(2,-3)$ を通る？ $\Longrightarrow m^2+2m+3=0$ 　$\therefore m=-1\pm\sqrt{2}i$（実数 m が存在しない）← 点 $(2,-3)$ を通る直線は１本もない。



ℓ の通過領域

(*)を一般化すると、

ℓ が点 (X,Y) を通る $\iff m^2+Xm-Y=0$ をみたす実数 m が存在する

$\boxed{\text{解答}}$

ℓ が点 (X,Y) を通るとき、$m^2+Xm-Y=0$ …(*)をみたす実数 m が存在する。

(*)の判別式を D とすると、$D\geqq 0$ である。

よって、$D\geqq 0$ より、$X^2+4Y\geqq 0 \iff Y\geqq -\frac{1}{4}X^2$

したがって、

ℓ が通過する領域は $y\geqq -\frac{1}{4}x^2$ であり、

右図の斜線部。ただし、境界を含む。