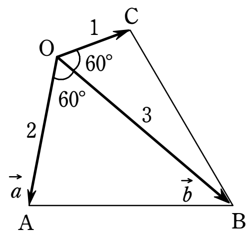
円のベクトル方程式　解答

1．［センター追試］

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\angle \mathrm{AOB}=60^\circ$ から

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}={}^{\text{ア}}3$$



$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{5}{4}$ ……① から

$$(\vec{a}-\vec{p})\cdot(\vec{b}-\vec{p})=\frac{5}{4}$$

$$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{4}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ を代入して　$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+3=\frac{5}{4}$

よって，① は　$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\frac{{}^{\text{イ}}7}{{}^{\text{ウ}}4}=0$

さらに，変形して　$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2-\frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2}{4}+\frac{7}{4}=0$ ……②

ここで　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4+2\cdot 3+9=19$ ……③

ゆえに，② から　$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2-\frac{19}{4}+\frac{7}{4}=0$

よって　$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=3$

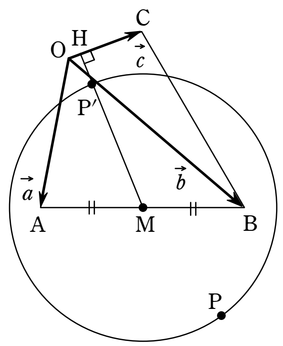
$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|>0$ であるから　$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{{}^{\text{エ}}2}\right|=\sqrt{{}^{\text{オ}}3}$

したがって，点 M を $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ となるように定めると，点 P は，M を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円周上を動く。

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，$|\vec{c}|=1$，$\angle \mathrm{BOC}=60^\circ$ から

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=3\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 120^\circ=2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$



$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MH}}={}^{\text{カ}}0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}})=0$$

$$\vec{c}\cdot\left(t\vec{c}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0$$

$$t|\vec{c}|^2-\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=0$$

$t\cdot 1^2-\frac{1}{2}\left(-1+\frac{3}{2}\right)=0$　　これを解いて　$t=\frac{{}^{\text{キ}}1}{{}^{\text{ク}}4}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{1}{4}|\vec{c}|=\frac{1}{4}$

また，③ から　$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{|\vec{a}+\vec{b}|}{2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$

直角三角形 OMH において，三平方の定理により

$$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{75}{16}}=\frac{{}^{\text{ケ}}5\sqrt{{}^{\text{コ}}3}}{{}^{\text{サ}}4}$$

M を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円と直線 MH の交点のうち，H に近い方を P′ とすると，点 P と直線 OC の距離が最小になるのは，P が P′ と一致するときである。

よって，点 P と直線 OC の距離の最小値は

$$\mathrm{P'H}=\mathrm{MH}-\mathrm{MP'}=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{{}^{\text{シ}}3}}{{}^{\text{ス}}4}$$

したがって，△OCP の面積の最小値は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OC}\cdot\mathrm{P'H}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{{}^{\text{セ}}3}}{{}^{\text{ソ}}8}$$

別解　［$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|$ の求め方］

$\overrightarrow{\mathrm{MH}}=\frac{\vec{c}}{4}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=-\frac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{4}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|^2=\left|\frac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{4}\right|^2=\frac{1}{16}(4|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{c}-4\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$=\frac{1}{16}(16+36+1+24-6+4)=\frac{75}{16}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|=\sqrt{\frac{75}{16}}=\frac{{}^{\text{ケ}}5\sqrt{{}^{\text{コ}}3}}{{}^{\text{サ}}4}$

2．［岡山大］

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

与えられた等式から　$2|\vec{p}|^2-(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

これを変形すると　$|\vec{p}|^2-\left(\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{2}\right)\cdot\vec{p}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}+\left|\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2=\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|^2$$

よって　$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|=\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|$

ゆえに，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}$ で定めると，P の軌跡は C を中心とする半径 $\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|$ の円となる。

(2)　(1) から　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$ から　$|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=0$

よって　$|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2=-5\vec{a}\cdot\vec{b}$

(1) の円の半径を r とすると

$$r^2=\left|\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{4}\right|^2=\frac{1}{16}(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)$$

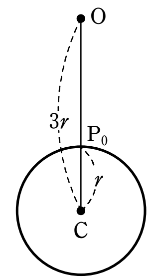
$$=\frac{1}{16}(-5\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{a}\cdot\vec{b})=-\frac{1}{16}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\left|\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2=\frac{1}{16}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)$$

$$=\frac{1}{16}(-5\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{a}\cdot\vec{b})=-\frac{9}{16}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=9r^2$　　　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3r$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|>r$ であるから，点 O は (1) の円の外部にあり，$\mathrm{P_0}$ はこの円と線分 OC の交点である。



よって　$\mathrm{OP_0}:\mathrm{P_0C}=(3r-r):r=2:1$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

3 点 O，A，B は異なる点で同一直線上にないから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いた表し方はただ 1 通りである。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる s，t の値は

$$s=\frac{1}{6},\ t=-\frac{1}{3}$$