No.2　演習プリント　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　名前（　　　　　　　　　）

[センター]

k を実数とし，座標平面上に点 P(1，0) をとる。曲線 $y=-x^3+9x^2+kx$ を C とする。

(1)　点 Q$(t,\ -t^3+9t^2+kt)$ における曲線 C の接線が点 P を通るとすると $-\boxed{ア}t^3+\boxed{イウ}t^2-\boxed{エオ}t=k$ が成り立つ。$p(t)=-\boxed{ア}t^3+\boxed{イウ}t^2-\boxed{エオ}t$ とおくと，関数 $p(t)$ は $t=\boxed{カ}$ で極小値 $\boxed{キク}$ をとり，$t=\boxed{ケ}$ で極大値 $\boxed{コ}$ をとる。したがって，点 P を通る曲線 C の接線の本数がちょうど 2 本となるのは，k の値が $\boxed{サ}$ または $\boxed{シス}$ のときである。また，点 P を通る曲線 C の接線の本数は $k=5$ のとき $\boxed{セ}$ 本，$k=-2$ のとき $\boxed{ソ}$ 本，$k=-12$ のとき $\boxed{タ}$ 本となる。

(2)　$k=0$ とする。曲線 $y=-x^3+6x^2+7x$ を D とする。曲線 C と D の交点の x 座標は $\boxed{チ}$ と $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ である。$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，2 曲線 C，D および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた二つの図形の面積の和は $\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニ}}$ である。

[センター]

p を実数とし，$f(x)=x^3-px$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもつための p の条件を求めよう。$f(x)$ の導関数は，$f'(x)=\boxed{\text{ア}}\,x^{\boxed{\text{イ}}}-p$ である。

したがって，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$\boxed{\text{ア}}\,a^{\boxed{\text{イ}}}-p=\boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ。さらに，$x=a$ の前後での $f'(x)$ の符号の変化を考えることにより，p が条件 $\boxed{\text{エ}}$ を満たす場合は，$f(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～④ のうちから一つ選べ。

⓪ $p=0$　① $p>0$　② $p\geqq 0$　③ $p<0$　④ $p\leqq 0$

(2) 関数 $f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとるとする。また，曲線 $y=f(x)$ を C とし，C 上の点 $\left(\dfrac{p}{3},\ f\left(\dfrac{p}{3}\right)\right)$ を A とする。

$f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとることから，$p=\boxed{\text{オ}}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{\text{カキ}}$ で極大値をとり，$x=\boxed{\text{ク}}$ で極小値をとる。曲線 C の接線で，点 A を通り傾きが 0 でないものを ℓ とする。ℓ の方程式を求めよう。

ℓ と C の接点の x 座標を b とすると，ℓ は点 $(b,\ f(b))$ における C の接線であるから，ℓ の方程式は b を用いて

$y=\left(\boxed{\text{ケ}}\,b^2-\boxed{\text{コ}}\right)(x-b)+f(b)$ と表すことができる。また，ℓ は点 A を通るから，

方程式 $\boxed{\text{サ}}\,b^3-\boxed{\text{シ}}\,b^2+1=0$ を得る。この方程式を解くと，$b=\boxed{\text{ス}},\ \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるが，

ℓ の傾きが 0 でないことから，ℓ の方程式は $y=\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}x+\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

点 A を頂点とし，原点を通る放物線を D とする。ℓ と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x\geqq 0$ の表す領域に含まれる部分の面積 S を求めよう。D の方程式は $y=\boxed{\text{ニ}}\,x^2-\boxed{\text{ヌ}}\,x$ であるから，定積分を計算することにより，$S=\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$ となる。