マーク演習プリント　　数と式　集合と命題　　解答　　　　　　　　　　　　　　　　名前（　　　　　　　　　　　）

1． $f(x)=1+2a-(1+2a)x+(2-a)x$

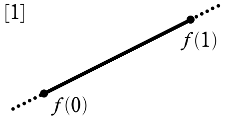
$=(-{}^{\text{ア}}3a+{}^{\text{イ}}1)x+2a+1$

(1)　[1]　$-3a+1\geqq 0$ すなわち $a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は $x=0$ で最小値をとり，

その値は　　$f(0)={}^{\text{ウ}}2a+{}^{\text{エ}}1$

[1]

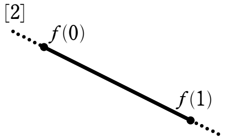


[2]　$-3a+1<0$ すなわち $a>\dfrac{1}{3}$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は $x=1$ で最小値をとり，

その値は　　$f(1)={}^{\text{オ}}-a+{}^{\text{カ}}2$

[2]



(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において，常に不等式が成り立つための必要十分条件は

$$(0\leqq x\leqq 1 \text{ における } f(x) \text{ の最小値})\geqq\frac{2(a+2)}{3}$$

(1) より，$a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　　$2a+1\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$

この不等式を解くと　　$a\geqq\dfrac{1}{4}$

$a\leqq\dfrac{1}{3}$ との共通範囲は　　$\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$　……①

$a>\dfrac{1}{3}$ のとき　　$-a+2\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$

この不等式を解くと　　$a\leqq\dfrac{2}{5}$

$a>\dfrac{1}{3}$ との共通範囲は　　$\dfrac{1}{3}<a\leqq\dfrac{2}{5}$　……②

①，② から，求める a の値の範囲は　　$\dfrac{{}^{\text{キ}}1}{{}^{\text{ク}}4}\leqq a\leqq\dfrac{{}^{\text{ケ}}2}{{}^{\text{コ}}5}$

(3)　(1) より　　$g(a)=\begin{cases}2a+1 & \left(a\leqq\dfrac{1}{3}\right)\\ -a+2 & \left(a>\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}$

すなわち，$g(a)$ の値は $a\leqq\dfrac{1}{3}$ の範囲で増加し，$a>\dfrac{1}{3}$ の範囲で減少する。

よって，$\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{2}{5}$ において，$g(a)$ の最大値は $g\left(\dfrac{1}{3}\right)$ であり，最小値は $g\left(\dfrac{1}{4}\right)$ か $g\left(\dfrac{2}{5}\right)$ のうちの値が小さい方である。

$$g\left(\frac{1}{4}\right)=2\cdot\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}=1.5,\quad g\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{2}{5}+2=\frac{8}{5}=1.6$$

ゆえに，$g(a)$ は $a=\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{{}^{\text{サ}}3}{{}^{\text{シ}}2}$ をとり，

$a=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{{}^{\text{ス}}5}{{}^{\text{セ}}3}$ をとる。

2．(1)　$ab=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{1-3}{1-2}={}^{\text{ア}}2$

$$a+b=\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}+1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1-2}={}^{\text{イ}}2({}^{\text{ウエ}}-1+\sqrt{{}^{\text{オ}}6})$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\{2(-1+\sqrt{6})\}^2-2\cdot 2=4(7-2\sqrt{6})-4$$

$$=4(6-2\sqrt{6})={}^{\text{カ}}8({}^{\text{キ}}3-\sqrt{{}^{\text{ク}}6})$$

(2)　(1) から　　$a^2+b^2+4(a+b)=8(3-\sqrt{6})+4\cdot 2(-1+\sqrt{6})={}^{\text{ケコ}}16$

$ab=2$ から　　$b=\dfrac{2}{a}$

これを $a^2+b^2+4(a+b)=16$ に代入して　　$a^2+\left(\dfrac{2}{a}\right)^2+4\left(a+\dfrac{2}{a}\right)=16$

両辺に a^2 を掛けて整理すると　　$a^4+{}^{\text{サ}}4a^3-{}^{\text{シス}}16a^2+{}^{\text{セ}}8a+{}^{\text{ソ}}4=0$

3．(1)　$x=1$ が不等式 ① を満たすとき　$1-6a\geqq -1$　が成り立つ。

よって　　$a\leqq\dfrac{{}^{\text{イ}}1}{{}^{\text{ウ}}3}$　(ア ③)

(2)　$x=2$ が不等式 ① を満たさないとき　$2-6a<-1$　が成り立つ。

よって　　$a>\dfrac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}2}$　(エ ⓪)

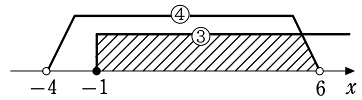
(3)　$a=0$ のとき，① から　　$x\geqq -1$　……③

② から　　$|x-1|<5$　　すなわち　　$-5<x-1<5$

よって　　$-4<x<6$　……④

③，④ の共通範囲を求めて

${}^{\text{キク}}-1\leqq x<{}^{\text{サ}}6$　(ケ ③，コ ①)



(4)　① から　　$x\geqq 6a-1$　……⑤

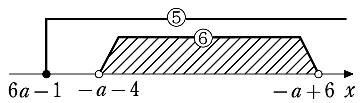
② から　　$-5<x+a-1<5$　　すなわち　　$-a-4<x<-a+6$　……⑥

不等式 ② の解は ⑥ であり，連立不等式 ①，② の解は ⑤，⑥ の共通範囲である。

⑥ と，⑤，⑥ の共通範囲が一致するのは，右の図のようになるときであり，

その条件は　　$6a-1\leqq -a-4$

すなわち　　$a\leqq\dfrac{{}^{\text{スセ}}-3}{{}^{\text{ソ}}7}$　(シ ③)



4．$AB=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\dfrac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{3}\}}$

$$=\frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-{}^{\text{ア}}3}=\frac{1}{2\sqrt{6}+4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-2}{2(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}=\frac{\sqrt{6}-{}^{\text{イ}}2}{{}^{\text{ウ}}4}\quad\cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=(1+\sqrt{3}+\sqrt{6})+(1-\sqrt{3}+\sqrt{6})$$

$$={}^{\text{エ}}2+{}^{\text{オ}}2\sqrt{6}\quad\cdots\cdots ②$$

また，$\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=\dfrac{A+B}{AB}$ であるから

$$A+B=AB\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$$

これに ①，② を代入して

$$A+B=\frac{\sqrt{6}-2}{4}\cdot(2+2\sqrt{6})$$

$$=\frac{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+1)}{2}$$

$$=\frac{{}^{\text{カ}}4-\sqrt{6}}{{}^{\text{キ}}2}$$

5．(1)　(i)　$\{0\}$ は，0 のみを要素にもつ集合である。

0 は有理数であるから，$\{0\}$ は集合 A の部分集合である。

すなわち　　$A\supset\{0\}$　(ア ③)

(ii)　$\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ であるから，$\sqrt{28}$ は無理数である。

よって，$\sqrt{28}$ は集合 B の要素であるから　　$\sqrt{28}\in B$　(イ ⓪)

(iii)　(i) より，$\{0\}\subset A$ であるから　　$A=\{0\}\cup A$　(ウ ⑤)

(iv)　有理数であり，かつ無理数である数は存在しないから　　$\varnothing=A\cap B$　(エ ④)

(2)　命題「$p\Longrightarrow q$」は偽。(反例)　$x=\sqrt{7}$

命題「$q\Longrightarrow p$」は真。

(証明)　$x+\sqrt{28}=r$ (r は有理数) とすると　　$x=r-\sqrt{28}$

r は有理数，(1)(ii) より $\sqrt{28}$ は無理数であるから，$r-\sqrt{28}$ は無理数である。

よって，x は無理数である。

以上から，p は q であるための必要条件であるが，十分条件でない。　(オ ①)

命題「$p\Longrightarrow r$」は偽。(反例)　$x=\sqrt{3}$

命題「$r\Longrightarrow p$」は偽。(反例)　$x=0$

以上から，p は r であるための必要条件でも十分条件でもない。　(カ ③)

6．(1)　$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\cdots,\ 100\}$

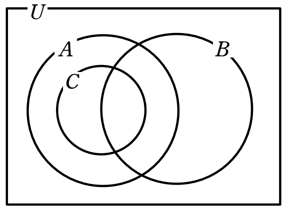
$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\cdots,\ 99\}$

$C=\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\cdots,\ 100\}$

よって　$C\subset A$,

$B\cap C\neq\varnothing$,

$\overline{B}\cap C\neq\varnothing$



A，B，C の関係を表す図は，右の図のようになる。

したがって　ア ⓪

(2)　(イ)　「$x\in C$ ならば $x\in A\cap B$」は偽。

(反例)　$x=4$　($4\in C$ であるが，$4\in A\cap B$ でない。)

「$x\in A\cap B$ ならば $x\in C$」は偽。

(反例)　$x=6$　($6\in A\cap B$ であるが，$6\in C$ でない。)

よって，$x\in C$ は $x\in A\cap B$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

したがって　イ ③

(ウ)　「$x\in A\cap\overline{C}$ ならば $x\in A$」は真。

参考　$A\cap\overline{C}\subset A$ である。

「$x\in A$ ならば $x\in A\cap\overline{C}$」は偽。

(反例)　$x=4$　($4\in A$ であるが，$4\in A\cap\overline{C}$ でない。)

よって，$x\in A\cap\overline{C}$ は $x\in A$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

したがって　ウ ②

(エ)　「$x\in A\cup B$ ならば「$x\in A\cap\overline{C}$ または $x\in B$」」は偽。

(反例)　$x=4$　($4\in A\cup B$ であるが，$4\in A\cap\overline{C}$ でも $4\in B$ でもない。)

「「$x\in A\cap\overline{C}$ または $x\in B$」ならば $x\in A\cup B$」は真。

参考　$A\cap\overline{C}\subset A$ であるから，$(A\cap\overline{C})\cup B\subset A\cup B$ である。

よって，$x\in A\cup B$ は「$x\in A\cap\overline{C}$ または $x\in B$」であるための必要条件であるが，十分条件ではない。

したがって　エ ①

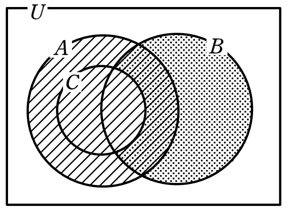
(オ)　「$x\in A\cup B$ ならば「$x\in A$ または $x\in B\cap\overline{C}$」」は真。

「「$x\in A$ または $x\in B\cap\overline{C}$」ならば $x\in A\cup B$」も真。

よって，$x\in A\cup B$ は「$x\in A$ または $x\in B\cap\overline{C}$」であるための必要十分条件である。

したがって　オ ⓪

参考　$C\subset A$ のとき，$A\cup(B\cap\overline{C})=A\cup B$ が成り立つ。



7．(1)　「$r\Longrightarrow(p$ または $q)$」の対偶は

「$\overline{(p\text{ または }q)}\Longrightarrow\overline{r}$」

すなわち　「$(\overline{p}$ かつ $\overline{q})\Longrightarrow\overline{r}$」(ア ①)

(2)　⓪～④ について，条件 p，q，(p または q)，r を満たすかどうかを調べると，次の表のようになる。ただし，○ は満たすこと，× は満たさないことを表す。

	p	q	p または q	r
⓪	×	×	×	×
①	○	○	○	×
②	×	○	○	○
③	○	×	○	○
④	×	○	○	×

「(p または q) $\Longrightarrow r$」の反例は，(p または q) を満たし，r を満たさないものであるから

イ ①，ウ ④ または イ ④，ウ ①

(3)　「$r\Longrightarrow(p$ または $q)$」の対偶は

「$(\overline{p}$ かつ $\overline{q})\Longrightarrow\overline{r}$」

$\overline{p}$：3 つの内角のうち，少なくとも 2 つは等しい

$\overline{q}$：直角三角形である

$\overline{r}$：45° の内角が少なくとも 1 つある

$\overline{p}$ を満たす三角形は，二等辺三角形である。

よって，($\overline{p}$ かつ $\overline{q}$) を満たす三角形は，直角二等辺三角形である。

直角二等辺三角形は，内角が 45°，45°，90° であるから $\overline{r}$ を満たす。

よって，「$(\overline{p}$ かつ $\overline{q})\Longrightarrow\overline{r}$」は真である。

ゆえに，「$r\Longrightarrow(p$ または $q)$」も真である。

一方，(2) より「(p または q) $\Longrightarrow r$」は反例があるから偽である。

よって，r は (p または q) であるための

十分条件であるが，必要条件ではない。(エ ②)

8．(1)　命題 A の逆：「$x>2$」ならば「$x^2>2$ または $x^3>0$」　(ア ④，イ ⓪)

対偶：「$x\leqq 2$」ならば「$x^2\leqq 2$ かつ $x^3\leqq 0$」　(ウ ⑤，エ ③)

(2)　(1) より，命題 A の逆は真である。

命題 A の対偶は偽である。(反例は $x=2$)

すなわち，命題 A も偽である。

よって，命題 A とその逆，対偶のうち，命題 A の逆のみが真である。　(オ ①)

(3)　(2) より，命題 A は偽であり，命題 A の逆は真である。

よって，「$x^2>2$ または $x^3>0$」は，「$x>2$」であるための必要条件であるが，十分条件ではない。　(カ ⓪)

9．$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ であり，$12>11$ から　$2\sqrt{3}>\sqrt{11}$

よって，条件 p は次のように表される。

p：$x<\sqrt{11}$　または　$x>2\sqrt{3}$

(1)　命題 $p\Longrightarrow r$ は偽である。(反例：$x=\sqrt{10}$)

$\sqrt{9}<\sqrt{11}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$ であるから　$3<\sqrt{11}<2\sqrt{3}<4$

よって，すべての整数が $x<\sqrt{11}$ または $x>2\sqrt{3}$ を満たす x の値の範囲にあるから，

命題 $r\Longrightarrow p$ は真である。

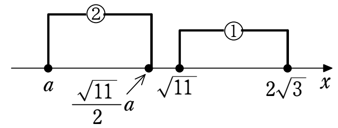
したがって，p は r であるための必要条件であるが，十分条件ではない。(ア ②)

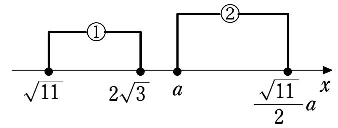
(2)　$\overline{p}$：$\sqrt{11}\leqq x\leqq 2\sqrt{3}$ ……①，　$\overline{q}$：$a\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{11}}{2}a$ ……②

まず，$A\cap B$ が空集合になる場合を考える。このとき，① と ② に共通範囲がないから

$\dfrac{\sqrt{11}}{2}a<\sqrt{11}$　または　$a>2\sqrt{3}$

すなわち　$a<2$　または　$a>2\sqrt{3}$　……③





よって，$A\cap B$ が空集合でないのは，a が ③ 以外の範囲にあるときである。

したがって，$A\cap B$ が空集合でないための必要十分条件は　イ $2\leqq a\leqq$ ウ $2\sqrt{\text{エ}3}$

10．(1)　$\overline{p}$：$m\leqq k$ かつ $n\leqq k$　(ア ②)

(2)　(i)　$k=1$ のとき　p：$m>1$ または $n>1$　q：$mn>1$

$\overline{p}$：$m\leqq 1$ かつ $n\leqq 1$　$\overline{q}$：$mn\leqq 1$

m，n は自然数であるから　$m\leqq 1$ かつ $n\leqq 1\iff m=1,\ n=1$

$mn\leqq 1\iff m=1,\ n=1$

よって，$\overline{p}\iff\overline{q}$ が成り立つから，$p\iff q$ も成り立つ。

ゆえに，p は q であるための必要十分条件である。　(イ ⓪)

(ii)　$k=2$ のとき　p：$m>2$ または $n>2$　q：$mn>4$　r：$mn>2$

$\overline{p}$：$m\leqq 2$ かつ $n\leqq 2$　$\overline{q}$：$mn\leqq 4$　$\overline{r}$：$mn\leqq 2$

(条件 p，r について)

条件 $\overline{r}$ を満たす自然数 m，n の組は $(m,\ n)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ であり，これらはいずれも条件 $\overline{p}$ を満たす。

よって，$\overline{r}\Longrightarrow\overline{p}$ は真であるから，$p\Longrightarrow r$ も真である。

$\overline{p}\Longrightarrow\overline{r}$ は偽である (反例：$m=2$，$n=2$) から，$r\Longrightarrow p$ も偽である。

したがって，p は r であるための十分条件であるが，必要条件でない。(ウ ②)

(条件 p，q について)

$\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$ は偽である (反例：$m=3$，$n=1$) から，$p\Longrightarrow q$ も偽である。

条件 $\overline{p}$ を満たす自然数 m，n の組は $(m,\ n)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$ であり，これらはいずれも条件 $\overline{q}$ を満たす。

よって，$\overline{p}\Longrightarrow\overline{q}$ は真であるから，$q\Longrightarrow p$ も真である。

したがって，p は q であるための必要条件であるが，十分条件でない。(エ ①)