数と式　集合と命題　解答

1．
$$\frac{1}{a}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}={}^{\text{ア}}3-{}^{\text{イ}}2\sqrt{{}^{\text{ウ}}2}$$
$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}={}^{\text{エ}}2-\sqrt{{}^{\text{オ}}3}$$

よって　$\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})$
$$=(6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6})-(6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$$
$$={}^{\text{カ}}8\sqrt{{}^{\text{キ}}2}-{}^{\text{ク}}6\sqrt{{}^{\text{ケ}}3}$$

不等式 $|2abx-a^2|<b^2$ の両辺を正の数 $2ab$ で割ると　$\left|x-\dfrac{a}{2b}\right|<\dfrac{b}{2a}$

よって　$-\dfrac{b}{2a}<x-\dfrac{a}{2b}<\dfrac{b}{2a}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)<x<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)$　……①

ここで　$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=(6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6})+(6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$
$$=12-4\sqrt{6}$$

したがって，①は　${}^{\text{コ}}4\sqrt{{}^{\text{サ}}2}-{}^{\text{シ}}3\sqrt{{}^{\text{ス}}3}<x<{}^{\text{セ}}6-{}^{\text{ソ}}2\sqrt{{}^{\text{タ}}6}$

2．(1)　命題「$q \Longrightarrow p$」に対する反例は，条件 q を満たし，条件 p を満たさないものである。

⓪～③について，条件 p，q を満たすかどうかを調べると，次のようになる。

	a	b	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert a-2b\rvert$	q	$(a+b)^2+(a-2b)^2$	p
⓪	0	0	0	0	○	0	○
①	1	0	1	1	○	2	○
②	0	1	1	2	×	5	×
③	1	1	2	1	○	5	×

（○は条件を満たす，×は条件を満たさない）

よって，命題「$q \Longrightarrow p$」に対する反例は　$a=1$，$b=1$　（ア ③）

(2)　命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶は「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」である。

$\overline{q}$ は　$|a+b|\geqq 1$ かつ $|a-2b|\geqq 2$　（イ ④）

$\overline{p}$ は　$(a+b)^2+(a-2b)^2\geqq 5$　（ウ ⑦）

(3)　命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶

「$|a+b|\geqq 1$ かつ $|a-2b|\geqq 2 \Longrightarrow (a+b)^2+(a-2b)^2\geqq 5$」

は真である。

証明　$|a+b|\geqq 1$，$|a-2b|\geqq 2$ の各辺を 2 乗すると
$$(a+b)^2\geqq 1,\ (a-2b)^2\geqq 4$$
これらの辺々を加えると
$$(a+b)^2+(a-2b)^2\geqq 5$$
（証明終）

対偶が真であるから，命題「$p \Longrightarrow q$」は真である。

命題「$q \Longrightarrow p$」は，(1) より反例があるから偽である。

以上から，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない。　（エ ②）