◎ 不定積分

$$\underset{f(x)\text{の原始関数}}{F(x)} \xrightarrow{\text{微分}} \boxed{f(x)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{f(x)\text{の導関数}}{f'(x)}$$

(ちなみに、$f(x)$は $F(x)$の導関数)
微分して得られる関数

導関数が $f(x)$である(微分すると$f(x)$になる)ようなxの関数を $f(x)$の **原始関数** という。$F(x)$が$f(x)$の原始関数のとき、$f(x)$の任意の原始関数は、定数Cを用いて、$F(x)+C$ と表せる。
$F(x)+C$を $f(x)$の **不定積分** といい、$\int f(x)dx$ と表す。

$F'(x)=f(x)$ のとき、$\int f(x)dx = F(x)+C$ (Cは積分定数)

(説明) 微分して$2x$になる関数は無数にある($2x$の原始関数は1つではない)

微分

$x^2 \longrightarrow 2x$
$x^2+1 \longrightarrow 2x$
$x^2+2 \longrightarrow 2x$
$x^2+3 \longrightarrow 2x$
$\vdots \longrightarrow \vdots$

x^2やx^2+1などは、$2x$の原始関数の1つである。
(高校数学では、不定積分の1つと言っても問題ない)

x^2+C (Cは任意の定数) ← これが$2x$の不定積分 (そう決めたから)

高校数学では、不定積分は、原始関数すべてを求めると思えばよい。

$2x$の不定積分は、x^2+C (Cは積分定数)であり、$\int 2x\,dx = x^2+C$ と書く。
不定積分は、一般に、「(原始関数の1つ)$+C$」と表せるので、

$\int 2x\,dx = x^2+10+C$ や $\int 2x\,dx = x^2-7+C$ でも間違いではないが、
(2xの原始関数の1つ)

ふつう、原始関数の1つは、定数項が0であるものを使うのが一般的である。

◎ 定積分

$f(x)$の原始関数の1つが $F(x)$であるとき、
2つの実数a,bに対して、$F(b)-F(a)$の値は、原始関数$F(x)$の選び方に関わらず、一定の値となる。
$F(b)-F(a)$を $f(x)$のaからbまでの **定積分** といい、$\int_a^b f(x)dx$ と表す。

$F'(x)=f(x)$ のとき、$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

(説明) $f(x)$の不定積分は、原始関数の1つ$F(x)$と積分定数Cを用いて、
$\int f(x)dx = F(x)+C$ と表すと決めたように、
(定数項が0であるものを使うのが一般的)

(※) 定積分も同様に、原始関数$F(x)$は定数項が0であるもの使うのが一般的である。(定積分の値は、原始関数によらないので)

「(※の理由)

① $\int_a^b 2x\,dx = \left[x^2\right]_a^b = b^2-a^2$
2xの原始関数の1つ

② $\int_a^b 2x\,dx = \left[x^2+1\right]_a^b = (b^2+1)-(a^2+1) = b^2-a^2$

③ $\int_a^b 2x\,dx = \left[x^2-5\right]_a^b = (b^2-5)-(a^2-5) = b^2-a^2$

$2x$の原始関数の1つは、x^2, x^2+1, x^2-5など無数にあるが、定数項は、差をとったときに消えるので、①〜③のどれもOKだが、①で書くのが一般的。