外積と法線ベクトル＆平面の方程式

◎ 外積

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$　(サラスの公式)

上のような計算「(左上)×(右下)−(右上)×(左下)」で値を求める作業を
「サラスの方法」と呼ぶことにする。

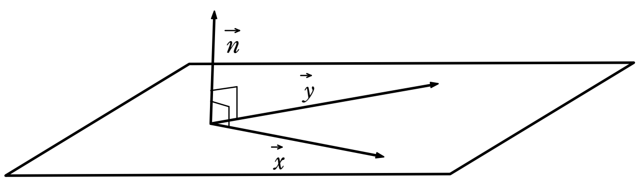
空間上の２つのベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ において、

$\vec{x} \times \vec{y}$ を $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の「**外積**」といい、$\vec{x} \times \vec{y}$ は、$\boldsymbol{\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}}$ である。

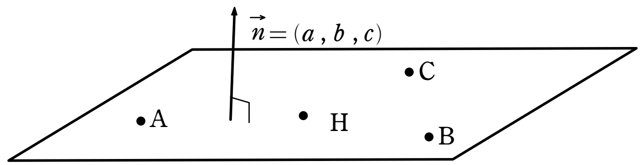
$\vec{x} \times \vec{y}$ の x 成分は、$\vec{x}$ と $\vec{y}$ の y 成分 (b, e) と z 成分 (c, f) を利用して、サラスの方法で求めることができる。$\vec{x} \times \vec{y}$ の y 成分と z 成分も、x 成分と同様にして、サラスの方法で求めることができる。

$\vec{n} = \vec{x} \times \vec{y}$ とすると、$\vec{n} \cdot \vec{x} = 0$ かつ $\vec{n} \cdot \vec{y} = 0$ である。
$\vec{x} = (a, b, c)$, $\vec{y} = (d, e, f)$ として、上記が成り立つかを確かめてみましょう。

$\vec{n} \perp \vec{x}$ かつ $\vec{n} \perp \vec{y}$ より、$\vec{n}$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ に張られる平面に垂直なベクトルであり、
$\vec{n}$ はこの平面の「**法線ベクトル**」という。

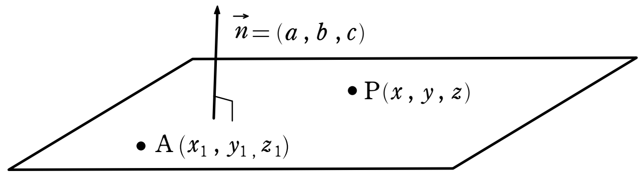


◎ 法線ベクトルの使い方



平面ABCの法線ベクトルの１つを $\vec{n}$ とする。
Hが平面ABC上にあるとき、
使い方：「Hが平面ABC上にある $\iff$ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = 0$」を利用すると、
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = 0$ という方程式を解けば、未知数が決定できる。
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = 0$ の代わりに「$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BH}} = 0$ や $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CH}} = 0$」でもよい。

◎ 平面の方程式



A(x_1, y_1, z_1) を通り、$\vec{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面を α とする。$(\vec{n} \neq \vec{0})$
このとき、「P(x, y, z) が平面 α 上にある $\iff$ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$」が成り立つ。
よって、
$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$
$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$
$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$ とおくと、$ax + by + cz + d = 0$ となる。
つまり、平面 α の方程式は、$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ …(∗) である。
(∗)を平面の方程式の一般形という。