

◎ 複素数の相等

a, b, c, d が実数のとき、
 1. $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
 2. $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ かつ $b = d$

(1の証明)

まず、「 $a = b = 0 \Rightarrow a + bi = 0$ 」... ① を示す

$a = b = 0$ のとき、 $a + bi = 0 + 0i = 0$

よって、① は成り立つ。

次に、「 $a + bi = 0 \Rightarrow a = b = 0$ 」... ② を示す

$a + bi = 0$ のとき、 $b \neq 0$ であると仮定すると

$a + bi = 0$ より、 $i = -\frac{a}{b}$ ← (ア)

a, b は実数より、 $-\frac{a}{b}$ は実数であるが、これは

i が虚数であることに矛盾。 $\therefore b = 0$

よって、 $a + bi = 0$ かつ $b = 0$ より、 $a = 0$

したがって、② は成り立つ

以上より、 $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (証明終)

(2の証明)

a, b, c, d は実数より、 $a - c, b - d$ は実数である。

$a + bi = c + di$

$\Leftrightarrow a - c + (b - d)i = 0$

$\Leftrightarrow a - c = b - d = 0$

$\Leftrightarrow a = c$ かつ $b = d$

よって、 $a + bi = c + di$

1を証明した
の2. 使える

(コメント)

(2)の証明の別解として、1の結果を用いずに、

$a - c + (b - d)i = 0 \Leftrightarrow a - c = b - d = 0$ を左の1の証明と同様に示すこともできる。

補足 1の証明の(ア)の部分の

②の証明のときに用いた「 $P \Rightarrow Q$ 」の否定の仕方

「 $P \Rightarrow Q$ 」の否定は、「仮定 P が成り立っているとき、結論 Q が成り立たない」

NG $P \Rightarrow Q$ でない

OK {
 • P のとき、 Q でない
 • P であって、 Q でない
 • P かつ \bar{Q}
 など

「 $P \Rightarrow Q$ でない」が偽だからといって、
 $P \Rightarrow Q$ が真であるとは限らない。
 「 $P \Rightarrow Q$ でない」が偽というのは、
 条件 P をみたすものうち1つでも Q でないものが
 存在する状態。