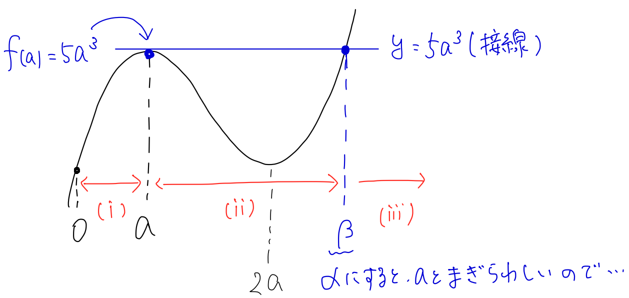
S② 5-1の別解

$f'(x)=6(x-a)(x-2a)$



（方針）1の位置が(i),(ii),(iii)の場所にあるときで、場合分けする

☆ 3次関数と接線の式を連立すると、$(x-\alpha)^2(x-\beta)=0$ の形になる。
（αは接点のx座標）

今回は、$y=f(x)$と$y=5a^3$は$x=a$で接するので、
連立した方程式の左辺は$(x-a)^2$を因数にもつ。
残りの1次式の因数は、最高次の係数と定数項で
帳じり合わせをする。

解答

$f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x$

$f'(x)=6x^2-18ax+12a^2=6(x-a)(x-2a)$

$a>0$ より、$a<2a$ なので、

$f(x)$は$x=a$で極大、$x=2a$で極小をとる。

$f(a)=5a^3$ より、$f(x)=5a^3$ のとき

$2x^3-9ax^2+12a^2x-5a^3=0$

$(x-a)^2(2x-5a)=0 \leftarrow (1x^2\cdots+a^2)(\square x+◎)$

$1\times\square=2,\ a^2\times◎=-5a^3$

$x=a,\ \frac{5}{2}a$

(i) $1\leqq a$ のとき、

$M(a)=f(1)=12a^2-9a+2$

(ii) $a<1<\frac{5}{2}a$、つまり、$\frac{2}{5}<a<1$ のとき、

$M(a)=f(a)=5a^3$

(iii) $\frac{5}{2}a\leqq1$、つまり、$0<a\leqq\frac{2}{5}$ のとき、

$M(a)=f(1)=12a^2-9a+2$

(i)〜(iii)より

$$M(a)=\begin{cases}12a^2-9a+2 & \left(0<a\leqq\frac{2}{5},\ 1\leqq a\right)\\ 5a^3 & \left(\frac{2}{5}<a<1\right)\end{cases}$$

補足