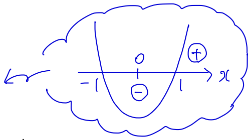
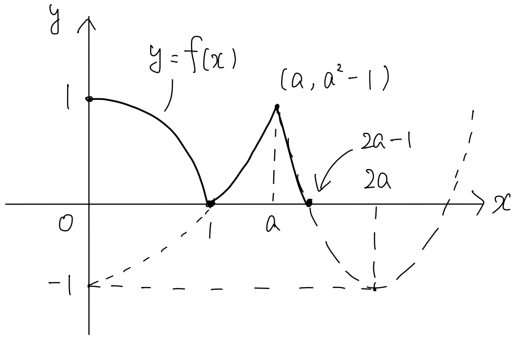
(1) $x^2-1=(x+1)(x-1)$ より、

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & (0 \leqq x < 1) \\ x^2-1 & (1 \leqq x < a) \\ (x-2a)^2-1 & (a \leqq x \leqq 2a-1) \end{cases}$$



よって、$y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



(2) $\boxed{\text{ポイント}}$

S_2 を計算するときに、$\int (x+\alpha)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+\alpha)^{n+1}+C$ を利用。

$\boxed{\text{解答}}$ $S_1=\int_0^1(-x^2+1)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^a (x^2-1)\,dx+\int_a^{2a-1}\{(x-2a)^2-1\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^a+\left[\frac{1}{3}(x-2a)^3-x\right]_a^{2a-1} \\ &= \frac{1}{3}a^3-a+\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}-2a+1\right)-\left(-\frac{1}{3}a^3-a\right) \\ &= \frac{2}{3}a^3-2a+\frac{4}{3} \end{aligned}$$

また、$S_1 : S_2 = 1 : 2$ より、$S_2=2S_1$

よって、$\frac{2}{3}a^3-2a+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

$$a^3-3a=0$$

$$a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$$

$a>1$ より、$\underline{a=\sqrt{3}}$ //