3次関数のグラフと極値をもつ条件

◎ 3次関数のグラフ

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ について.

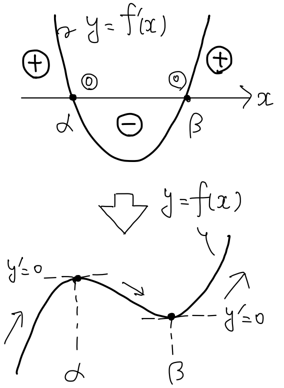
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ である。

また、$f'(x)=0$ の判別式をDとする。

(I) $a>0$ のとき、

$f'(x)$：下に凸の放物線

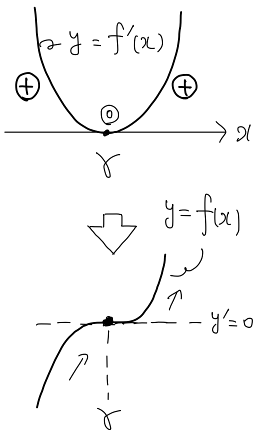
① $D>0$



$f'(x)$において、符号変化が起こるので、

極値をもつ

② $D=0$

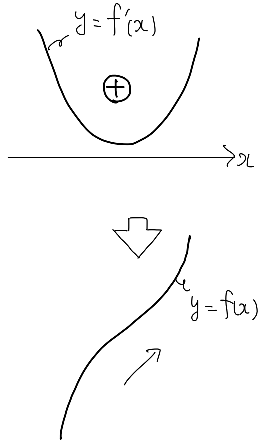


$f'(x)$において符号変化が起こらないので、

極値をもたない

また、$f(x)$は単調増加である

③ $D<0$



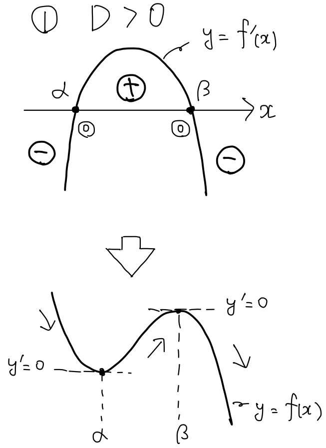
$f'(x)$において符号変化が起こらないので、

極値をもたない

また、$f(x)$は単調増加である

(II) $a<0$ のとき、

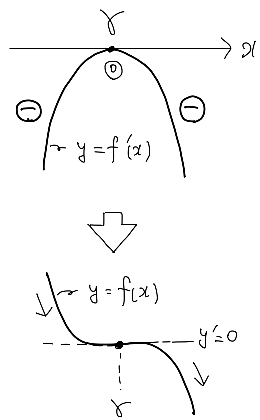
① $D>0$



$f'(x)$において、符号変化が起こるので、

極値をもつ

② $D=0$

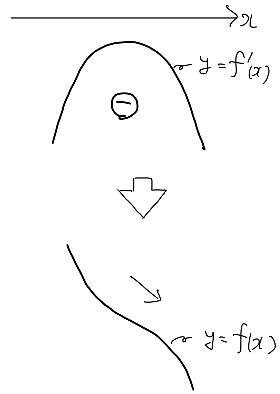


$f'(x)$において符号変化が起こらないので、

極値をもたない

また、$f(x)$は単調減少である

③ $D<0$



$f'(x)$において符号変化が起こらないので、

極値をもたない

また、$f(x)$は単調減少である

☆ $f(x)$が極値をもつための条件は、

「$f'(x)$の符号(⊕ or ⊖)が変化すること」← これが重要

☆ 3次関数$f(x)$において、$f'(x)=0$の判別式をDとする。

1.「$f(x)$が極値をもつ」 $\Longleftrightarrow D>0$

2.「$f(x)$が極値をもたない」 $\Longleftrightarrow D\leqq 0$

$f'(x)=0$は(重)解をもつが、符号変化が起こらないので、極値をもたない