高2G 3−1の補足

3-1 a, b, c を実数とするとき、次の不等式を証明せよ。また、等号が成立するための必要十分条件を述べよ。

(1) $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ (2) $a^4+b^4+c^4 \geqq abc(a+b+c)$

(1) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$

よって、

$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ ■

また、等号成立条件は、

$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$ より $\underline{a=b=c}$

(別解)「1つの文字に着目して、平方完成する」

$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$= a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2$

$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2-\frac{(b+c)^2}{4}+b^2-bc+c^2$

$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b^2-2bc+c^2)$

$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2 \geqq 0$

よって、

$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ ■

また、等号成立条件は、

$a=\frac{b+c}{2},\ b=c$ より $\underline{a=b=c}$

(2) $a^4+b^4+c^4$

$=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2$

$\geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ ($\because$ (1))

$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$

$\geqq ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab$ ($\because$ (1))

$=abc(a+b+c)$

よって、

$a^4+b^4+c^4 \geqq abc(a+b+c)$ ■

また、等号成立条件は、

$a^2=b^2=c^2$ かつ $ab=bc=ca$

(ポイント) $ab=ca$ は、両辺を a で割りたくなるが、$a\neq 0$ or $a=0$ で場合分けがいる

$a=0$ のとき、$b^2=c^2=0$ より、$b=c=0$

$\therefore a=b=c=0$ …①

$a\neq 0$ のとき、$ab=ca$ より、$b=c$

また、$b^2\neq 0$ より、$b\neq 0$

よって、$ab=bc$ より、$a=c$ $\therefore a=b=c$

これは、①の場合も含む

以上より、$\underline{a=b=c}$