

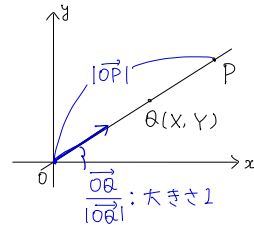
反転の軌跡

55テキスト数学 I A II B P.342の22番の問題

(ポイント)

- ・ Pの反転先は Qであり、Qの反転先は Pである。P, Qのうち、一方の座標を用いて、もう一方の座標は表せる。
- ・ Pが $y = 2x + 1$ 上の点であり、Pの位置が決まると $OP \cdot OQ = 2$ により Qの位置が決まる。しかし、形式的には、パラメータを消去することになるので、初めから、Qの座標を用いて、Pの座標を表すのがよい。

★ 反転の軌跡では 単位ベクトル を利用するとな?。
(or 同じ向きの方角ベクトル)



解答 Q(x, y) とおくと、 $OP \cdot OQ = 2$ より、 $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= |\vec{OP}| \cdot \frac{\vec{OQ}}{|\vec{OQ}|} \quad \leftarrow \frac{OP}{OQ} \cdot \vec{OQ} \text{ でもいいね} \\ &= \frac{2}{|\vec{OQ}|^2} \vec{OQ} \quad (\because OP \cdot OQ = 2) \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(OPとOQは同じ向きで OP/OQ で長さを調整)

$$\therefore P \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right)$$

Pは、 $y = 2x + 1$ 上にあるので、

$$\frac{2y}{x^2 + y^2} = 2 \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

よって、Qの軌跡は、

中心(-2, 1), 半径 $\sqrt{5}$ の円 (ただし、原点を除く)