三角関数演習プリント　No.2　解答

名前(　　　　　　　　　　　　　　)

１．［クリアー数学Ⅱ 問題305］

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin 2\theta = \cos\theta$　　(2)　$\cos 2\theta = -\cos\theta$

(3)　$\cos 2\theta - 5\cos\theta + 3 = 0$　　(4)　$\sin 2\theta < \sin\theta$

(5)　$\cos 2\theta + 9\sin\theta + 4 < 0$　　(6)　$\cos 2\theta > \sin\theta$

【コメント】

解答には入れていませんが、単位円を描いて考えましょう

(1)　方程式を変形すると　$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

ゆえに　$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

よって　$\cos\theta = 0$ または $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\cos\theta = 0$ から　$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ から　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(2)　方程式を変形すると　$2\cos^2\theta - 1 = -\cos\theta$

整理すると　$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

すなわち　$(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

よって　$\cos\theta = -1$ または $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\cos\theta = -1$ から　$\theta = \pi$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ から　$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

したがって，解は　$\theta = \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$

(3)　方程式を変形すると　$(2\cos^2\theta - 1) - 5\cos\theta + 3 = 0$

整理すると　$2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

すなわち　$(\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\cos\theta - 2 \neq 0$ であるから　$2\cos\theta - 1 = 0$

よって　$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

(4)　不等式を変形すると　$2\sin\theta\cos\theta < \sin\theta$

よって　$\sin\theta(2\cos\theta - 1) < 0$

したがって　$(\sin\theta > 0$ ……① かつ $2\cos\theta - 1 < 0$ ……②)　または

$(\sin\theta < 0$ ……③ かつ $2\cos\theta - 1 > 0$ ……④)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

[1]　① を解くと　$0 < \theta < \pi$

② を解くと　$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5}{3}\pi$

解の共通範囲をとって　$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$　……⑤

[2]　③ を解くと　$\pi < \theta < 2\pi$

④ を解くと　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

解の共通範囲をとって　$\frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$　……⑥

求める解は，⑤，⑥ の範囲を合わせて　$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi,\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

(5)　不等式を変形すると　$(1 - 2\sin^2\theta) + 9\sin\theta + 4 < 0$

整理すると　$2\sin^2\theta - 9\sin\theta - 5 > 0$

すなわち　$(\sin\theta - 5)(2\sin\theta + 1) > 0$

$\sin\theta - 5 < 0$ であるから　$2\sin\theta + 1 < 0$

よって　$\sin\theta < -\frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$

(6)　不等式を変形すると　$1 - 2\sin^2\theta > \sin\theta$

整理すると　$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 < 0$

すなわち　$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) < 0$

よって　$-1 < \sin\theta < \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$

２．［クリアー数学Ⅱ 問題306］

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $y = \cos 2x - 2\sin x - 1$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

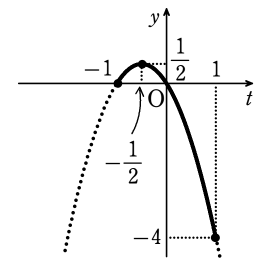
$\cos 2x - 2\sin x - 1 = (1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x - 1 = -2\sin^2 x - 2\sin x$

であるから　$y = -2\sin^2 x - 2\sin x$

$\sin x = t$ とおくと，$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$-1 \leqq t \leqq 1$　……①

y を t で表すと　$y = -2t^2 - 2t$

すなわち　$y = -2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$



① の範囲において，y は

$t = -\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{2}$，

$t = 1$ で最小値 -4

をとる。

また，$0 \leqq x < 2\pi$ であるから，

$t = -\frac{1}{2}$ のとき　$x = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$t = 1$ のとき　$x = \frac{\pi}{2}$

よって　$x = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ で最大値 $\frac{1}{2}$，$x = \frac{\pi}{2}$ で最小値 -4

三角関数演習プリント　No.2　解答　　　　名前(　　　　　　)

３．[クリアー数学Ⅱ 問題311]

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$　　(2) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$

(3) $\sin x \geqq \sqrt{3}\cos x$　　(4) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) > 1$

【コメント】

解答には入れていませんが、単位円を描いて考えましょう

(1) 左辺の三角関数を合成すると　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$　……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$ であるから，この範囲で ① を解くと

$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$　または　$x-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$

よって　$x=\frac{\pi}{3}$，π

(2) 左辺の三角関数を合成すると　$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$　……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{3} \leqq x+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$ であるから，この範囲で ① を解くと

$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi$　または　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{9}{4}\pi$

よって　$x=\frac{5}{12}\pi$，$\frac{23}{12}\pi$

(3) $\sin x \geqq \sqrt{3}\cos x$ から　$\sin x - \sqrt{3}\cos x \geqq 0$

左辺の三角関数を合成すると　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \geqq 0$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \geqq 0$　……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$-\frac{\pi}{3} \leqq x-\frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$ であるから，この範囲で ① を解くと

$0 \leqq x-\frac{\pi}{3} \leqq \pi$

よって　$\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{4}{3}\pi$

(4) 左辺の三角関数を合成すると　$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>1$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$　……①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{4} \leqq x+\frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ であるから，この範囲で ① を解くと

$\frac{\pi}{4} \leqq x+\frac{\pi}{4} < \frac{5}{6}\pi$，$\frac{13}{6}\pi < x+\frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$

よって　$0 \leqq x < \frac{7}{12}\pi$，$\frac{23}{12}\pi < x < 2\pi$

４．[クリアー数学Ⅱ 問題312]

次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(1) $y=-\sin x+\cos x$　$(0 \leqq x < 2\pi)$

(2) $y=\sqrt{6}\sin x-\sqrt{2}\cos x$　$(0 \leqq x < 2\pi)$

(3) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$

【コメント】

解答には入れていませんが、単位円を描いて考えましょう

(1) $-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

よって　$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$\frac{3}{4}\pi \leqq x+\frac{3}{4}\pi < \frac{11}{4}\pi$ であるから　$-1 \leqq \sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right) \leqq 1$

$\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)=1$ のとき、$x+\frac{3}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$　∴ $x=\frac{7}{4}\pi$

$\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)=-1$ のとき、$x+\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$　∴ $x=\frac{3}{4}\pi$

よって，この関数は $x=\frac{7}{4}\pi$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとり，$x=\frac{3}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$ をとる。

(2) $\sqrt{6}\sin x-\sqrt{2}\cos x=2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

よって　$y=2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$ であるから　$-1 \leqq \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$ のとき、$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$　∴ $x=\frac{2}{3}\pi$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき、$x-\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$　∴ $x=\frac{5}{3}\pi$

よって，この関数は $x=\frac{2}{3}\pi$ で最大値 $2\sqrt{2}$ をとり，$x=\frac{5}{3}\pi$ で最小値 $-2\sqrt{2}$ をとる。

(3) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

よって　$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $\frac{\pi}{3} \leqq x+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi$ であるから　$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \leqq 1$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ のとき、$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$　∴ $x=\frac{\pi}{6}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、$x+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$　∴ $x=\pi$

よって，この関数は $x=\frac{\pi}{6}$ で最大値 2 をとり，$x=\pi$ で最小値 $-\sqrt{3}$ をとる。