等比数列の基本問題　見本

1．次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　初項 5，公比 3　　　(2)　初項 -7，公比 -7

(3)　$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{64}$，$\frac{1}{256}$，……

2．第 3 項が 20，第 5 項が 80 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3．次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　初項 1，公比 6　　　(2)　初項 5，公比 $\frac{1}{2}$

(3)　5，15，45，135，……　　　(4)　4，-12，36，-108，……

4．第 2 項が 6，初項から第 3 項までの和が 21 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

5．初項から第 3 項までの和が 42，第 2 項から第 4 項までの和が 84 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

1．（アイテム）

等比数列の一般項 $a_n = ar^{n-1}$（a：初項，r：公比）

(1)　$a_n = 5\cdot 3^{n-1}$ //

(2)　$a_n = -7\cdot(-7)^{n-1}$ より．$a_n = (-7)^n$ //

底がそろっているので，まとめるのがよい

底（てい）（指数）

(3)　$\{a_n\}$：$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \cdots$ より．

$\{a_n\}$ の初項は，$\frac{1}{4}$，公比は $\frac{1}{4}$ である。

よって．

$a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ より．$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ //

2．$\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とすると，

$a_3 = 20$ より．　$ar^2 = 20 \cdots ①$

$a_5 = 80$ より．　$ar^4 = 80 \cdots ②$

② ÷ ① より．

$r^2 = 4$　$\therefore r = \pm 2$

① より．$r = 2$ のとき．$4a = 20$　$\therefore a = 5$

$r = -2$ のとき．$4a = 20$　$\therefore a = 5$

よって．

$a_n = 5\cdot 2^{n-1}$ または，$a_n = 5\cdot(-2)^{n-1}$ //

3．（アイテム）

$r \neq 1$ のとき，等比数列の和 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

（a：初項，r：公比，n：項数）

(1)　$S_n = \dfrac{6^n-1}{6-1} = \dfrac{6^n-1}{5}$ //

$\dfrac{a(r^{項数}-1)}{r-1}$

(2)　$S_n = \dfrac{5\{1-(\frac{1}{2})^n\}}{1-\frac{1}{2}} = 10\{1-(\frac{1}{2})^n\}$ //

(3)　$\{a_n\}$：5，15，45，135，… より

初項は 5，公比は 3 である。

よって．$S_n = \dfrac{5(3^n-1)}{3-1} = \dfrac{5(3^n-1)}{2}$ //

(4)　$\{a_n\}$：4，-12，36，-108，… より．

初項は 4，公比は -3 である。

よって．

$S_n = \dfrac{4\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)} = 1-(-3)^n$ //

4．この数列を $\{a_n\}$ とする。

$a_2 = 6$ より．　$ar = 6$　$\cdots ①$

また．$a_1 + a_2 + a_3 = 21$ より．

$a + ar + ar^2 = 21$

$a(1+r+r^2) = 21$　$\cdots ②$

② ÷ ① より

$\dfrac{1+r+r^2}{r} = \dfrac{7}{2}$

$2r^2 + 2r + 2 = 7r$

$2r^2 - 5r + 2 = 0$

$(2r-1)(r-2) = 0$

$r = \frac{1}{2}, 2$

よって．① より．

$(a, r) = (12, \frac{1}{2}), (3, 2)$ //

5．この数列を $\{a_n\}$ とする。

$a_1 + a_2 + a_3 = 42$ より．

$a + ar + ar^2 = 42$

$a(1+r+r^2) = 42$　$\cdots ①$

また．$a_2 + a_3 + a_4 = 84$ より．

$ar + ar^2 + ar^3 = 84$

$ar(1+r+r^2) = 84 \cdots ②$

② ÷ ① より．$r = 2$

$r = 2$ を ① に代入すると．

$7a = 42$　　$\therefore a = 6$

以上より．$a = 6,\ r = 2$ //