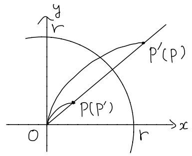
反転

1. 反転とは.

定点Oを中心とする半径rの円がある。
点Oを通る直線上に、Oと異なる点Pをとり、
半直線OP上に点P′を **$OP\cdot OP'=r^2$** によって定める。
このとき、点Pに点P′を対応させることを**「反転」**という。
また、点Pが図形F上を動くとき、点P′が描く図形F′をFの**「反形」**という。



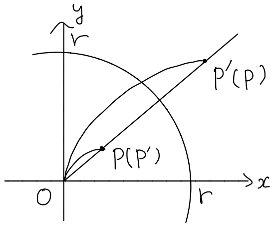
$OP\cdot OP'=r^2$

2. 反転の性質

反転は、点Pを「$f: OP\cdot OP'=r^2$」によって別の点P′に移す変換である。
($OP=r$のときは、$P=P'$(不動点))
PとP′には、以下の関係がある。

(その1)

1. $OP>r \Leftrightarrow OP'<r$
2. $OP=r \Leftrightarrow OP'=r$
3. $OP<r \Leftrightarrow OP'>r$



(その2) 少し重要

「点P $\xrightarrow{f}$ 点P′」(点Pの反転先は点P′)であり、
「点P′ $\xrightarrow{f}$ 点P」(点P′の反転先は点P)である。

3. 反転先の点の座標 (重要)

$OP\cdot OP'=r^2\ (r>0) \cdots (*)$

$P(x,y)$, $P'(X,Y)$とすると, $(x,y)\neq(0,0)$, $(X,Y)\neq(0,0)$

$\overrightarrow{OP'}=|\overrightarrow{OP'}|\cdot\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=\dfrac{r^2}{|\overrightarrow{OP}|^2}\overrightarrow{OP}$ (∵(*)より)

$\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$: $\overrightarrow{OP}$と同じ向きの単位ベクトル

$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\dfrac{r^2}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ∴ $(X,Y)=\left(\dfrac{r^2x}{x^2+y^2}, \dfrac{r^2y}{x^2+y^2}\right)$

左記の(その2)から、$P\left(\dfrac{r^2X}{X^2+Y^2}, \dfrac{r^2Y}{X^2+Y^2}\right)$, $P'\left(\dfrac{r^2x}{x^2+y^2}, \dfrac{r^2y}{x^2+y^2}\right)$である。

4. 反形について.(覚える必要はない)

$f: OP\cdot OP'=r^2$について、PがOに一致するときは、P′は定義できない。
(Oの反転先は、定義できない)

点Oの反転先の点を仮に「無限遠点」と呼ぶことにする。
無限遠点は、点Oからの距離が限りなく遠い点であり、
円は、原点からの距離が有限の点の集合とみなし、
直線は、無限遠点を通るとみなすと以下が成り立つ。

1. 原点を通る直線	$\xrightarrow{f}$	原点を通る直線
2. 原点を通らない直線	$\xrightarrow{f}$	原点を通る円
3. 原点を通る円	$\xrightarrow{f}$	原点を通らない直線
4. 原点を通らない円	$\xrightarrow{f}$	原点を通らない円

反転では、「円または直線」は、「円または直線」に移る。

$\boxed{\text{ポイント}}$

原点を通る ⟶ 反転後が無限遠点を通る ⟶ 反形は直線
原点を通らない ⟶ 反転後が無限遠点を通らない ⟶ 反形は円
直線 ⟶ 無限遠点を通る ⟶ 反形は原点を通る
円 ⟶ 無限遠点を通らない ⟶ 反形は原点を通らない