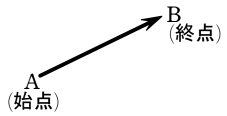
ベクトル　基本事項

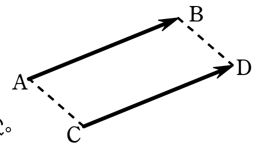
● ベクトルとは

◎ 有向線分とベクトル

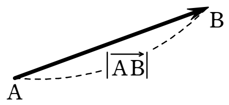
右図のように，向きを指定した線分を「**有向線分**」という。
有向線分 AB において，A を「**始点**」，B を「**終点**」という。
また，AB の長さを有向線分 AB の大きさ，または長さという。
有向線分は位置と，向きおよび大きさで定まる。
その位置を問題にしないで，向きと大きさだけで定まる量を「**ベクトル**」という。



右の図のように，位置は違うが，向きが同じで大きさが等しい有向線分 AB と有向線分 CD は，ベクトルとしては，同じものを表す。つまり，１つのベクトルを有向線分を用いて表すとき，その始点は平面上のどの点にとってもよい。

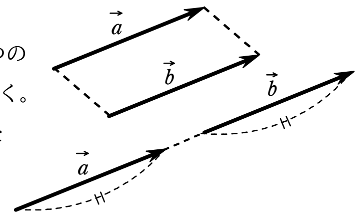


有向線分 AB で表されるベクトルを，$\overrightarrow{AB}$ と書き表す。
ベクトルは，1 つの文字と矢印を用いて，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のように表すこともある。
ベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\vec{a}$ の大きさを，それぞれ $|\overrightarrow{AB}|$，$|\vec{a}|$ と書く。
このとき，$|\overrightarrow{AB}|$ は線分 AB の長さに等しい。
特に，大きさが 1 であるベクトルを「**単位ベクトル**」という。



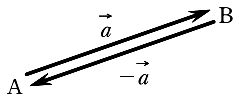
◎ ベクトルの相等

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じで大きさが等しいとき，2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は「**等しい**」といい，$\vec{a}=\vec{b}$ と書く。
よって，$\vec{a}=\vec{b}$ ならば，それらを表す有向線分を平行移動して，重ね合わせることができる。



◎ 逆ベクトルと零ベクトル

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが反対であるベクトルを $\vec{a}$ の **逆ベクトル** といい，$-\vec{a}$ で表す。
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ とすると，$-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ である。すなわち、$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$である。
有向線分 AB の始点 A と終点 B が一致すると，AB は AA となる。
このとき，$\overrightarrow{AA}$ を大きさが 0 のベクトルと考え，「**零ベクトル**」または「ゼロベクトル」といい，$\vec{0}$ で表す。すなわち，任意の点 A に対して，$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ である。
また、零ベクトルの向きは考えない。

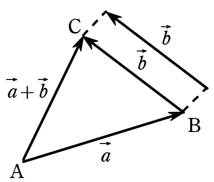


● ベクトルの演算

◎ ベクトルの加法

ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\vec{b}$ に対して，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ となるように点 C をとる。このようにして定まるベクトル $\overrightarrow{AC}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **和** といい，$\vec{a}+\vec{b}$ と書く。

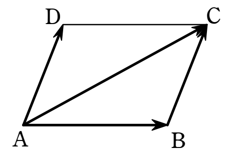
$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$



$$\boxed{\overrightarrow{A\square}+\overrightarrow{\square C}=\overrightarrow{AC}}$$

また、平行四辺形を使って，ベクトルの和を図示することもできる。
右の図の平行四辺形 ABCD において，
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ であるから，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ が成り立つ。

平行四辺形を使ったベクトルの和



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$

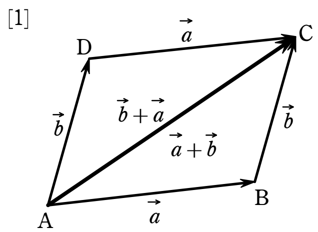
ベクトルの加法について，次の性質が成り立つ。

ベクトルの加法の性質

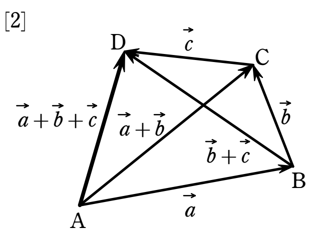
1	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	交換法則
2	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	結合法則

性質１，２が成り立つことは，次の図を用いて確かめられる。

[1]



[2]

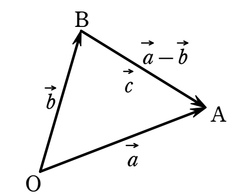


結合法則が成り立つので，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の和を単に $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書く。

◎ ベクトルの減法

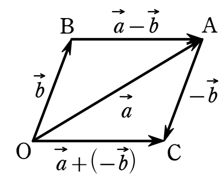
ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ を満たすベクトル $\vec{c}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **差** といい，$\vec{a}-\vec{b}$ と書く。一般に，
$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$ であるから，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ が成り立ち、
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ であるから，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ が成り立つ。

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\square B}-\overrightarrow{\square A}}$$



$$\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$$

ベクトルの減法について，次の性質が成り立つ。
１が成り立つことは，右の図の平行四辺形 OCAB を用いて確かめられる。



ベクトルの減法の性質

1	$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$
2	$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$

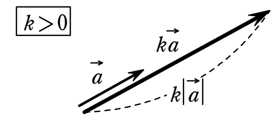
◎ ベクトルの実数倍

ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，$\vec{a}$ の k 倍 $k\vec{a}$ を次のように定める。

[1] $\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき

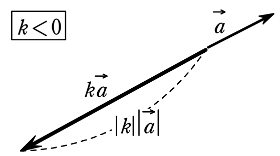
<u>$k>0$ の場合</u>　$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが $|\vec{a}|$ の k 倍であるベクトル。
特に　　$1\vec{a}=\vec{a}$

$\boxed{k>0}$



<u>$k<0$ の場合</u>　$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|\vec{a}|$ の $|k|$ 倍であるベクトル。
特に　　$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

$\boxed{k<0}$

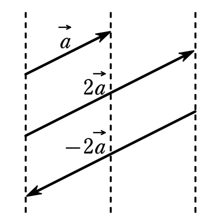


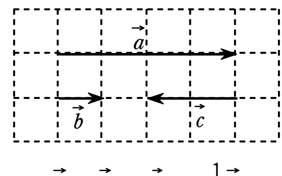
<u>$k=0$ の場合</u>　零ベクトル。
すなわち　　<u>$0\vec{a}=\vec{0}$</u>

[2] $\vec{a}=\vec{0}$ のとき　任意の実数 k に対して　　<u>$k\vec{0}=\vec{0}$</u>

上の定義から，$(-k)\vec{a}=-(k\vec{a})$ が成り立つから，これらを単に $-k\vec{a}$ と書く。

(例)





$\vec{a}=4\vec{b}$，　$\vec{c}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

ベクトルの実数倍について，次の性質が成り立つ。

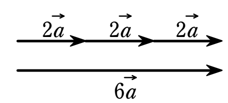
ベクトルの実数倍の性質

k，l は実数とする。

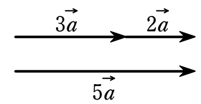
1	$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$
2	$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$
3	$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

これらの等式が成り立つことは，次の図で確かめることができる。

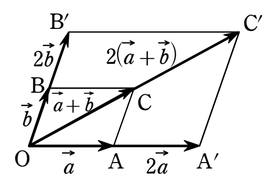
[1]　$3(2\vec{a})=6\vec{a}=(3\cdot 2)\vec{a}$



[2]　$(3+2)\vec{a}=5\vec{a}=3\vec{a}+2\vec{a}$



[3]　$2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$



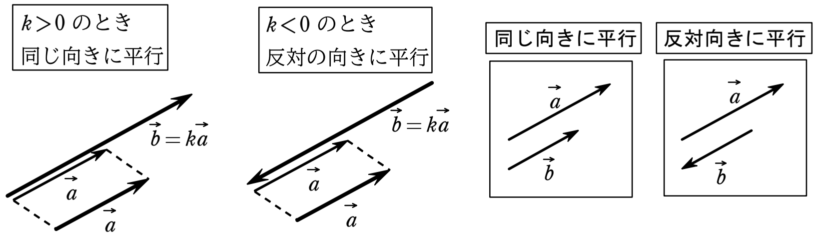
これまで調べた性質により，ベクトルの加法，減法，実数倍の計算では，$\vec{a}$，$\vec{b}$ などの式を<u>文字式と同じように扱うことができる</u>。

◎ ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きが同じであるか，または反対であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **平 行** であるといい，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ と書く。

ベクトルの平行について，実数倍の定義から，次のことが成り立つ。

> **ベクトルの平行条件**
> $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき
> $$\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ が存在する}$$



◎ 単位ベクトル

> $\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは，$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

● ベクトルの分解（重要）

> **ベクトルの分解**
> 2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく，また平行でないとする。このとき，
> 任意の平面ベクトル $\vec{p}$ は，次の形にただ1通りに表すことができる。
> $$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b} \qquad \text{ただし } s,\ t \text{ は実数}$$

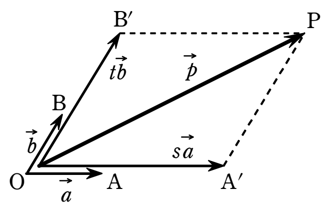
★ 平面上において、$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく，また平行でないような2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は「**1 次独立**」であるという。

証明　右の図のように

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，　$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，　$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

とする。点 P を通り，直線 OB，OA に平行な直線と，直線 OA，OB との交点を，それぞれ A′，B′ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$　……①



となる。ここで点 A′ は直線 OA 上に，点 B′ は直線 OB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 s，t がただ1組ある。

この2式を等式 ① に代入すると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　すなわち　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$　　終

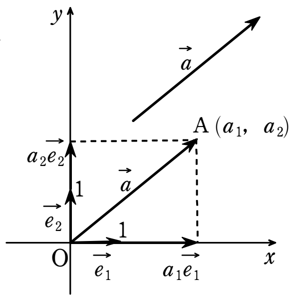
● ベクトルの成分

◎ ベクトルの成分表示

O を原点とする座標平面上で，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを **基本ベクトル** といい，それぞれ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ で表す。

座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が $(a_1,\ a_2)$ のとき，

$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$ と表せる。　← $\vec{a}$ は $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いてただ1通りに表される。



この $\vec{a}$ を，次のようにも書く。

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$　……①

① における a_1，a_2 を，それぞれ $\vec{a}$ の **x 成分**，**y 成分** といい，まとめて $\vec{a}$ の **成分** という。また，① を $\vec{a}$ の **成分表示** という。

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ と零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は，次のようになる。

$\vec{e_1}=(1,\ 0)$，　$\vec{e_2}=(0,\ 1)$，　$\vec{0}=(0,\ 0)$

2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次が成り立つ。

$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$

また，上の図で $|\vec{a}|=\mathrm{OA}$ であるから，次のことがいえる。

> **ベクトルの成分と大きさ**
> $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ は，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いると

$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$，$\vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$

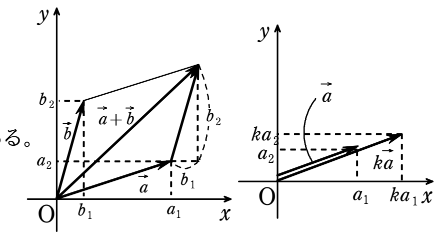
と表されるから

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}$

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}$　である。

また，k を実数とするとき

$k\vec{a}=(ka_1)\vec{e_1}+(ka_2)\vec{e_2}$　である。



これらを成分表示すると，次のことが成り立つ。

> **和，差，実数倍の成分表示**
> $(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$
> $(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$
> $k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　ただし，k は実数

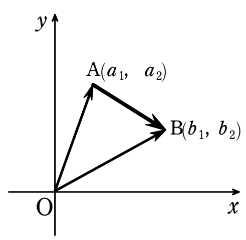
座標平面上に2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ をとると，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2)$，　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2)$ であるので，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$



すなわち，次のことが成り立つ。

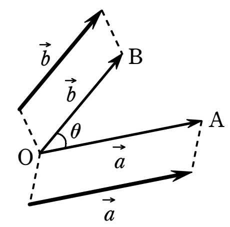
> 2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ について
> $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$，　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

● ベクトルの内積

◎ ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない2つのベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ とする。

1点 O を定め，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 A，B をとる。このとき，半直線 OA，OB のなす角 θ のうち，$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるものを，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ **のなす角** という。



$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とする。このとき，積 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **内 積** といい，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表す。

> $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　　ただし，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角

$\underline{\vec{a}=\vec{0}}$ または $\underline{\vec{b}=\vec{0}}$ のときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$ と定める。

★ 2つのベクトルの内積は，ベクトルではなく，実数（ただの数値）である。

◎ ベクトルの垂直・平行と内積

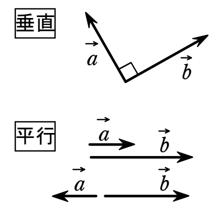
$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　$(0°\leqq\theta\leqq180°)$ であるから，θ と $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値について，次のようにまとめられる。

θ	$0°$	鋭角	$90°$	鈍角	$180°$
$\cos\theta$	1	$+$	0	$-$	-1
$\vec{a}\cdot\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$	$+$	0	$-$	$-\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$

$\theta=90°$ のとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **垂直** であるといい，$\vec{a}\perp\vec{b}$ と書く。

$\theta=0°$ のとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は同じ向きに平行，

$\theta=180°$ のとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は反対向きに平行　である。



また，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の符号は，$\cos\theta$ の符号に一致するから

$0°\leqq\theta<90°$ のとき　　$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$

$\theta=90°$ のとき　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$90°<\theta\leqq180°$ のとき　　$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$

以上から，次のことが成り立つ。

> **ベクトルの垂直・平行と内積**
> $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき
> 1　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$
> 2　$\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$　または　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$

◎ 成分による内積の表示

右の図のように，△OABにおいて

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$

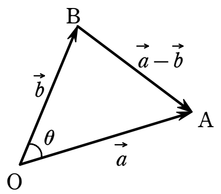
とすると，余弦定理により

$\mathrm{BA}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\cos\theta$

が成り立つ。これをベクトルで表すと

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

となる。



ここで，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とすると

$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

これを整理すると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

この式は，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときも，明らかに成り立つ。

一般に，ベクトルの内積は，その成分を用いて次のように表される。

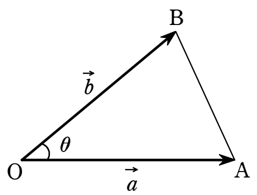
> **内積と成分**
>
> $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
>
> $$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

◎ ベクトルと三角形の面積

△OABにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。このとき，△OABの面積 S を，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表してみよう。

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$，$0^\circ<\theta<180^\circ$ とすると

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$



$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

ゆえに　$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$\quad=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}$

よって　$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ であるとすると，

$$|\vec{a}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2,\ |\vec{b}|^2=b_1{}^2+b_2{}^2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

であるから

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2$

$\quad=a_1{}^2b_2{}^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2{}^2b_1{}^2$

$\quad=(a_1b_2-a_2b_1)^2$

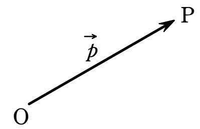
よって　$S=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

> △OABにおいて，$\mathrm{A}(a_1,a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,b_2)$ のとき，
>
> $$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

● ベクトルと平面図形

◎ 位置ベクトル

平面上で，点Oを定めておくと，どんな点Pの位置も，ベクトル $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって決まる。このようなベクトル $\vec{p}$ を，点Oに関する点Pの 位置ベクトル という。



また，位置ベクトルが $\vec{p}$ である点Pを，$\mathrm{P}(\vec{p})$ で表す。

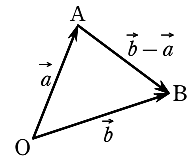
2点の位置ベクトルが同じならば，その2点は一致する。

★ 位置ベクトルは 平面上にOを定め、点O　に関する位置ベクトルで考えてよい。

位置ベクトルにおける点Oは平面上のどこに定めてもよい。

2点A，Bに対して，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$が成り立つから，次のことがいえる。

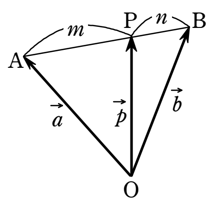


> 2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

◎ 内分点・外分点の位置ベクトル

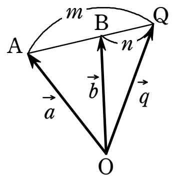
2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分ABを $m:n$ に内分する点 $\mathrm{P}(\vec{p})$，$m:n$ に外分する点 $\mathrm{Q}(\vec{q})$ の位置ベクトルは次のように表せる。

内分　AP：PB＝$m:n$

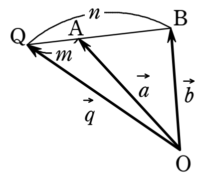


外分　AQ：QB＝$m:n$

$m>n$



$m<n$



AP：AB＝$m:(m+n)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\dfrac{m}{m+n}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\vec{p}-\vec{a}=\boxed{\dfrac{m}{m+n}}(\vec{b}-\vec{a})$

$\vec{p}=\left(1-\boxed{\dfrac{m}{m+n}}\right)\vec{a}+\boxed{\dfrac{m}{m+n}}\vec{b}$

$\quad=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

$m>n$ のとき

AQ：AB＝$m:(m-n)$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\boxed{\dfrac{m}{m-n}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\vec{q}-\vec{a}=\boxed{\dfrac{m}{m-n}}(\vec{b}-\vec{a})$

$\vec{q}=\left(1-\boxed{\dfrac{m}{m-n}}\right)\vec{a}+\boxed{\dfrac{m}{m-n}}\vec{b}$

$\quad=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$　……①

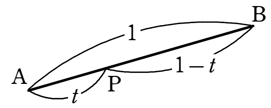
点Qの位置ベクトル $\vec{q}$ は，$m<n$ のときも①で表される。(各自確かめよ)

> **内分点・外分点の位置ベクトル**
>
> 2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分ABを $m:n$ に内分する点，$m:n$ に外分する点の位置ベクトルは，次のようになる。
>
> 内分　…　$\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$　　　外分　…　$\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$
>
> とくに，線分ABの中点の位置ベクトルは　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

<注意>　内分の場合の n を $-n$ におき換えたものが，外分の場合である。

点Pは2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分ABを内分する点で，AB：AP＝$1:t$，$0<t<1$ であるとする。

このとき，Pは線分ABを $t:(1-t)$ に内分する点であり，Pの位置ベクトル $\vec{p}$ は，次のように表される。



$$\vec{p}=\frac{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}{t+(1-t)}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

★ 線分ABの内分点も外分点もその位置ベクトルは，適当な実数 t を用いて

$(1-t)\vec{a}+t\,\vec{b}$ の形に表される。

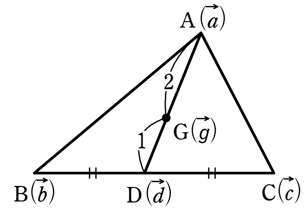
◎ 三角形の重心の位置ベクトル

3点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする△ABCにおいて，その重心Gの位置ベクトル $\vec{g}$ をとする。

辺BCの中点を $\mathrm{D}(\vec{d})$ とすると

$\vec{d}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$　　……①

△ABCの重心Gは，中線ADを2：1に内分する点であるから



$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{d}}{2+1}$　(三角形の重心は，3本の中線が交わる点で，各中線を2：1に内分する)

①より，$2\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$ であるから　　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

> 3点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする△ABCの重心Gの
>
> 位置ベクトル $\vec{g}$ は　　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

*