式と証明＆複素数と方程式

1．［(1) 関西大　(2) 摂南大］

(1)　展開式の一般項は　${}_{11}C_r x^{11-r}(-2)^r$

x^2 の項は $r=9$ のときで，その係数は

$${}_{11}C_9(-2)^9={}_{11}C_2\cdot(-512)=55\cdot(-512)={}^{ア}-28160$$

x^3 の項は $r=8$ のときで，その係数は

$${}_{11}C_8(-2)^8={}_{11}C_3\cdot256=165\cdot256={}^{イ}42240$$

(2)　$(a+2b-c)^4$ の展開式の一般項は

$$\frac{4!}{p!q!r!}a^p\cdot(2b)^q\cdot(-c)^r=\left\{\frac{4!}{p!q!r!}\cdot2^q\cdot(-1)^r\right\}a^pb^qc^r$$

ただし　$p+q+r=4$，$p\geqq0$，$q\geqq0$，$r\geqq0$

ab^2c の項は，$p=1$，$q=2$，$r=1$ のときであるから　$\frac{4!}{1!2!1!}\cdot2^2\cdot(-1)=-{}^{ア}48$

また，$(3a-b+2c)^6$ の展開式の一般項は

$$\frac{6!}{s!t!u!}(3a)^s\cdot(-b)^t\cdot(2c)^u=\left\{\frac{6!}{s!t!u!}\cdot3^s\cdot(-1)^t\cdot2^u\right\}a^sb^tc^u$$

ただし　$s+t+u=6$，$s\geqq0$，$t\geqq0$，$u\geqq0$

$a^2b^2c^2$ の項は，$s=t=u=2$ のときであるから　$\frac{6!}{2!2!2!}\cdot3^2\cdot(-1)^2\cdot2^2={}^{イ}3240$

2．［(1) 愛知工業大　(2) 近畿大］

(1)　展開式の一般項は　${}_{12}C_r\,x^{12-r}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)^r={}_{12}C_r\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^r\cdot x^{12-3r}$

$12-3r=3$ とすると　$r=3$

よって，x^3 の係数は　$\left(-\frac{1}{2}\right)^3{}_{12}C_3=-\frac{1}{8}\times\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=-\frac{55}{2}$

また，$12-3r=0$ とすると　$r=4$

よって，定数項は　$\left(-\frac{1}{2}\right)^4{}_{12}C_4=\frac{1}{16}\times\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{495}{16}$

(2)　展開式の一般項は　$\frac{8!}{p!q!r!}(x^2)^px^q\left(\frac{1}{x}\right)^r=\frac{8!}{p!q!r!}x^{2p+q-r}$

ただし，p，q，r は $p+q+r=8$ ……① を満たす 0 以上の整数である。

$2p+q-r=1$ ……② とすると，①＋② から　$3p+2q=9$

これを満たす 0 以上の整数の組 $(p,\ q)$ は　$(p,\ q)=(3,\ 0),\ (1,\ 3)$

このとき，① から　$(p,\ q,\ r)=(3,\ 0,\ 5),\ (1,\ 3,\ 4)$

よって，x の係数は　$\frac{8!}{3!0!5!}+\frac{8!}{1!3!4!}=56+280=336$

3．［(1) 獨協大　(2) 駒澤大］

(1)　$(与式)=\frac{2(x-1)+(x+1)}{3(x+1)(x-1)+2(x+1)}=\frac{3x-1}{3x^2+2x-1}=\frac{3x-1}{(x+1)(3x-1)}=\frac{1}{x+1}$

(2)　$\frac{x^2+8x+7}{x^2-7x+10}\div\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\frac{(x+1)(x+7)}{(x-2)(x-5)}\times\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-3)}=\frac{x+7}{x-5}$

4．［(1) 西日本工業大　(2) 東京電機大　(3) 日本大］］

(1)　与式の左辺を x について整理すると

$$ax^2+(-2a+b)x+a-b+c=x^2+1$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$a=1$，$-2a+b=0$，$a-b+c=1$

これを解いて　$a=1$，$b=2$，$c=2$

別解　$x-1=X$ とおくと　$x=X+1$

よって，与式は　$aX^2+bX+c=(X+1)^2+1$

すなわち　$aX^2+bX+c=X^2+2X+2$

これが X についての恒等式であるから　$a=1$，$b=2$，$c=2$

(2)　$\frac{4x+5}{2x^2+5x-3}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+3}$　……(＊)

(＊)の右辺について、

$$\frac{a(x+3)+b(2x-1)}{(2x-1)(x+3)}=\frac{(a+2b)x+3a-b}{2x^2+5x-3}$$

よって、(＊)がxについての恒等式となる条件は、

両辺の分子の係数を比較して　$4=a+2b$，$5=3a-b$

この連立方程式を解いて　$a=2$，$b=1$

(3)　$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=ax(x-1)(x+1)+bx(x-1)+cx+d$　……①

① が恒等式であるとき，① はどのような x についても成り立つ。

$x=0$ を代入すると　$1^3+2^3=d$

$x=1$ を代入すると　$1^3+2^3+3^3=c+d$

$x=-1$ を代入すると　$(-1)^3+1^3=2b-c+d$

$x=-2$ を代入すると　$(-2)^3+(-1)^3=-6a+6b-2c+d$

これを解くと　$a=3$，$b=9$，$c=27$，$d=9$

このとき，① の右辺は

$$3x(x-1)(x+1)+9x(x-1)+27x+9=3(x^3-x)+9(x^2-x)+27x+9$$
$$=3x^3+9x^2+15x+9$$

一方，① の左辺は

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=x^3+(x^3+3x^2+3x+1)+(x^3+6x^2+12x+8)$$
$$=3x^3+9x^2+15x+9$$

よって，① の両辺は一致し，① は恒等式となる。

したがって　$a=3$，$b=9$，$c=27$，$d=9$

別解　① の両辺を展開して整理すると

$$3x^3+9x^2+15x+9=ax^3+bx^2+(-a-b+c)x+d$$

係数を比較して　$a=3$，$b=9$，$-a-b+c=15$，$d=9$

したがって　$a=3$，$b=9$，$c=27$，$d=9$

5．［(1) 京都産業大　(2) 北里大　(3) 神奈川大］

(1)　$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$　……①

与えられた条件から　$P(-1)=1$，$P(2)=7$

よって，① から　$-a+b=1$，$2a+b=7$

これを解いて　$a=2$，$b=3$

したがって，求める余りは　$2x+3$

(2)　$f(x)$ を $(x-2)(x+5)$ で割った商を $Q_1(x)$ とすると

$f(x)=(x-2)(x+5)Q_1(x)+3x+5$　……①

よって，$f(x)$ を $x-2$ で割った余りは，① より　$f(2)=3\cdot2+5={}^{ア}11$

また，$f(x)$ を $(x-3)(x+5)$ で割った商を $Q_2(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$f(x)=(x-3)(x+5)Q_2(x)+ax+b$　……②

条件より　$f(3)=2$　　これと ② から　$3a+b=2$　……③

また，① より　$f(-5)=3\cdot(-5)+5=-10$

これと ② から　$-5a+b=-10$　……④

③，④ を解くと　$a=\frac{3}{2}$，$b=-\frac{5}{2}$

したがって，$f(x)$ を $(x-3)(x+5)$ で割った余りは　${}^{イ}\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

(3)　$P(x)$ を 3 次式 $(x+1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，

$P(x)=(x+1)^2(x-2)Q(x)+R(x)$　……①　（$R(x)$ は 0 または 2 次以下の整式）

$(x+1)^2(x-2)Q(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れるから，$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りは，$R(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りと等しい。

よって，$R(x)$ は次のように表される。

$$R(x)=a(x+1)^2+18x+9\quad(a\ は定数)$$

ゆえに，① から　$P(x)=(x+1)^2(x-2)Q(x)+a(x+1)^2+18x+9$

よって　$P(2)=9a+45$

$P(2)=9$ であるから　$9a+45=9$　　すなわち　$a=-4$

したがって，求める余りは　$-4(x+1)^2+18x+9=-4x^2+10x+5$

6．［(1) 東京都市大　(2) 倉敷芸術科学大］］

(1)　$\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}=k$ とおくと

$a+b=3k$　……①，　$b+c=4k$　……②，　$c+a=5k$　……③

①＋②＋③ から　$2(a+b+c)=12k$　　よって　$a+b+c=6k$　……④

④－② から　$a=2k$　　④－③ から　$b=k$　　④－① から　$c=3k$

$abc\neq0$ から　$k\neq0$

よって　$\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{abc}=\frac{(2k)^2\cdot k+k^2\cdot3k+(3k)^2\cdot2k}{2k\cdot k\cdot3k}=\frac{25k^3}{6k^3}=\frac{25}{6}$

(2)　$a+b+c=0$ から　$c=-a-b$，　$a+c=-b$，　$b+c=-a$

よって　$(左辺)=\frac{a^2}{(a+b)(-b)}+\frac{b^2}{(-a)(b+a)}+\frac{(-a-b)^2}{(-b)(-a)}$

$$=\frac{-a^3-b^3+(a+b)^3}{ab(a+b)}=\frac{3a^2b+3ab^2}{ab(a+b)}=\frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)}=3=(右辺)$$

別解　$(左辺)=\frac{a^2}{(-c)(-b)}+\frac{b^2}{(-a)(-c)}+\frac{c^2}{(-b)(-a)}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3=(右辺)$$

7．［龍谷大］

(1)　x，y は実数であるから

$$x^2-4x+y^2+2y+5=(x-2)^2+(y+1)^2 \geqq 0$$

等号が成り立つのは，$x-2=0$ かつ $y+1=0$ すなわち $x=2$ かつ $y=-1$ のときである。

(2)　両辺の平方の差を考えると

$$\{\sqrt{2(x+y)}\}^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,)^2=2(x+y)-(x+y+2\sqrt{xy}\,)$$
$$=x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,)^2 \geqq 0$$

$x>0$，$y>0$ より $\sqrt{2(x+y)}>0$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$ であるから，

$\sqrt{2(x+y)} \geqq \sqrt{x}+\sqrt{y}$ が成り立つ。

等号が成り立つのは，$\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$ すなわち $x=y$ のときである。

8．［(1) 名古屋経済大改　(2) 公立はこだて未来大 ］

(1)　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}\right)=\dfrac{b}{a}+\dfrac{9a}{b}+10$　……①

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{a}{b}>0$ であるから，相加･相乗平均の関係 より

$\dfrac{b}{a}+9\cdot\dfrac{a}{b} \geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{9a}{b}}=6$　……②

①，② から　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}\right) \geqq 6+10=16$

等号成立条件は，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{9a}{b}$ より、$(3a)^2=b^2$

$a>0$，$b>0$ より，$3a=b$ のときである。

(2)　$(|x|+|y|)^2-|x+y|^2=x^2+2|x||y|+y^2-(x^2+2xy+y^2)$

$$=2(|x||y|-xy) \geqq 0$$

$|x+y| \geqq 0$，$|x|+|y| \geqq 0$ であるから　　$|x+y| \leqq |x|+|y|$

等号が成立するのは，$|x||y|=xy$ すなわち $xy \geqq 0$ のときである。

9．［京都産業大］

(ア)　与えられた等式を変形すると

$$(3x+y)+(x-y)i=5+3i$$

x，y は実数であるから，$3x+y$，$x-y$ も実数である。

よって　　$3x+y=5$，$x-y=3$

これを解いて　　$(x,\ y)=(2,\ -1)$

(イ)　$z=x+yi$ (x，y は実数) とおくと　　$(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$

$z^2=i$ から　　$(x^2-y^2)+2xyi=i$

x，y は実数であるから，x^2-y^2，$2xy$ も実数である。

よって　　$x^2-y^2=0$，$2xy=1$

$x=y$ のとき　　$(x,\ y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順)

$x=-y$ のとき　　$-2x^2=1$ となり不適。

ゆえに　　$z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ (複号同順)

10．［(1) 甲南大　(2) 広島修道大改］

(1)　解と係数の関係により　　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=3$

よって　$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$

$$=2^2-3\cdot 3={}^{ア}-5$$

また　　$\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}=\dfrac{\beta^3+\alpha^3}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha\beta}=\dfrac{2\cdot(-5)}{3}={}^{イ}-\dfrac{10}{3}$

(2)　$x=2+3i$ から　　$x-2=3i$

両辺を 2 乗すると　　$x^2-4x+4=-9$

よって、　$x^2-4x+13=0$

したがって、

$$x^3-6x^2+16x-3=(x^2-4x+13)(x-2)-5x+23$$
$$=0-5(2+3i)+23$$
$$=13-15i$$

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ x^2-4x+13 & x^3-6x^2+16x-3 \\ & x^3-4x^2+13x \\ \hline & -2x^2+3x-3 \\ & -2x^2+8x-26 \\ \hline & -5x+23 \end{array}$$

11．［甲南大］

(解法 1)　$x=1+i$ が方程式 $x^3+ax^2+8x+b=0$ の解であるから

$$(1+i)^3+a(1+i)^2+8(1+i)+b=0$$

i について整理すると　　$b+6+(2a+10)i=0$

$b+6$，$2a+10$ は実数であるから　　$b+6=0$，$2a+10=0$

これを解いて　　$a=-5$，$b=-6$

(解法 2)　実数係数の 3 次方程式が虚数解 $1+i$ をもつとき，その共役な複素数 $1-i$ もこの方程式の解となる。

$1+i$，$1-i$ を解とする 2 次方程式は　$(1+i)+(1-i)=2$，　$(1+i)(1-i)=2$

であるから　　$x^2-2x+2=0$

よって，x^3+ax^2+8x+b は

x^2-2x+2 で割り切れる。

右の計算から (余り)$=0$ とすると

$2a+10=0$，$-2a+b-4=0$

これを解いて　　$a=-5$，$b=-6$

$$\begin{array}{r|l} & x+(a+2) \\ x^2-2x+2 & x^3+ax^2+8x+b \\ & x^3-2x^2+2x \\ \hline & (a+2)x^2+6x+b \\ & (a+2)x^2-2(a+2)x+2(a+2) \\ \hline & (2a+10)x-2a+b-4 \end{array}$$

(解法 3)　実数係数の 3 次方程式が虚数解 $1+i$ をもつとき，その共役な複素数 $1-i$ もこの方程式の解となる。

他の解を α とすると，3 次方程式の解と係数の関係により

$$\begin{cases} (1+i)+(1-i)+\alpha=-a & \cdots\cdots ① \\ (1+i)(1-i)+(1+i)\alpha+(1-i)\alpha=8 & \cdots\cdots ② \\ (1+i)(1-i)\alpha=-b & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② から　　$2+2\alpha=8$　　　よって　$\alpha=3$

$\alpha=3$ を ①，③ に代入して　　$2+3=-a$，$2\cdot 3=-b$

したがって　$a=-5$，$b=-6$

12．［立教大］

$x^2+ax+a+2=0$ が $x=1$ を解にもつとき，$2a+3=0$ であるから

$$a=-\frac{3}{2}$$

このとき $x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}=0$ の解は $(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0$ から $x=1$，$\dfrac{1}{2}$ であり，$x=1$ は 3 次方程式の 2 重解である。

$x^2+ax+a+2=0$ が重解をもつとき，判別式 $D=0$ より $a^2-4a-8=0$ であるから

$$a=2\pm 2\sqrt{3}$$

この重解は $x=1$ とは異なるから，3 次方程式の 2 重解である。

よって　　$a=-\dfrac{3}{2}$，$2\pm 2\sqrt{3}$

13．［名城大］

$\omega^3=1$　……① より　　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega \fallingdotseq 1$ であるから　　$\omega^2+\omega+1=0$　……②

よって，①，② から

$$\omega^4+\omega^3+3\omega^2+2\omega+1=\omega\cdot 1+1+3\omega^2+2\omega+1=3\omega^2+3\omega+2$$
$$=3(\omega^2+\omega+1)-1=3\cdot 0-1={}^{ア}-1$$

また，② より

$$\omega^{99}+\omega^{98}+\cdots\cdots+\omega^2+\omega+1$$
$$=\omega^{97}(\omega^2+\omega+1)+\omega^{94}(\omega^2+\omega+1)+\cdots\cdots+\omega(\omega^2+\omega+1)+1$$
$$=\omega^{97}\cdot 0+\omega^{94}\cdot 0+\cdots\cdots+\omega\cdot 0+1={}^{イ}1$$

14．［(1) 神奈川大　(2) 立命館大　(3) 流通科学大］

(1)　$a \neq 0$ であるから　$ab=6$ より　　$b=\frac{6}{a}$　　よって　　$3a+8b=3a+\frac{48}{a}$

$3a>0$，$\frac{48}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$3a+\frac{48}{a} \geqq 2\sqrt{3a\cdot\frac{48}{a}}=24$$

等号は，$3a=\frac{48}{a}$ すなわち $a=4$ のとき成立する。

よって，$3a+8b$ の最小値は　24

(2)　$x^2>0$，$y^2>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqq \sqrt{x^2y^2}=xy$$

$x^2+y^2=1$ であるから　　$\frac{1}{2} \geqq xy$

等号が成り立つのは，x，y が $x^2+y^2=1$，$x^2=y^2$ を満たすときであり，このとき

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，xy は $x={}^{\text{ア}}\frac{1}{\sqrt{2}}$，$y={}^{\text{イ}}\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，最大値 ${}^{\text{ウ}}\frac{1}{2}$ をとる。

別解　$x>0$，$y>0$，$x^2+y^2=1$ より，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおける。

　このとき　　$xy=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

　よって，xy は $\theta=\frac{\pi}{4}$ すなわち $x={}^{\text{ア}}\frac{1}{\sqrt{2}}$，$y={}^{\text{イ}}\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，最大値 ${}^{\text{ウ}}\frac{1}{2}$ をとる。

(3)　$\frac{x^2+2x+16}{x+2}=x+\frac{16}{x+2}=x+2+\frac{16}{x+2}-2$

$x>0$ より，$x+2>0$，$\frac{16}{x+2}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x+2+\frac{16}{x+2} \geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{16}{x+2}}=8$$

よって　　$x+2+\frac{16}{x+2}-2 \geqq 6$　　　すなわち　　$\frac{x^2+2x+16}{x+2} \geqq 6$

等号が成り立つのは $x+2=\frac{16}{x+2}$ のときである。

このとき　　$(x+2)^2=16$　　　よって　　$x+2=\pm 4$

$x>0$ より　　$x=2$

したがって，$\frac{x^2+2x+16}{x+2}$ は $x={}^{\text{ア}}2$ のとき最小値 ${}^{\text{イ}}6$ をとる。

15．［立命館大］

解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=\frac{1}{2}$

よって　　$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2-4=-2$

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\beta-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{1}{2}-8+2+2=-\frac{7}{2}$$

したがって，$\alpha-\frac{1}{\alpha}$，$\beta-\frac{1}{\beta}$ を解にもつ 2 次方程式は

$$x^2+2x-\frac{7}{2}=0 \qquad \text{すなわち} \qquad 2x^2+{}^{\text{ア}}4x+{}^{\text{イ}}(-7)=0$$

3 次方程式 $2x^3+ax+b=0$ の残る 1 つの解を c とすると

$$2x^3+ax+b=(2x^2+4x-7)(x-c)$$
$$=2x^3+(-2c+4)x^2+(-4c-7)x+7c$$

係数を比較して　　$0=-2c+4$，$a=-4c-7$，$b=7c$

この連立方程式を解くと　　$c=2$，$a={}^{\text{ウ}}-15$，$b={}^{\text{エ}}14$

残る 1 つの解は　　$x={}^{\text{オ}}2$

16．［神奈川大］

共通解を p とおくと　　$p^3+2p+a=0$ …… ①，　$p^2+4p+a=0$ …… ②

①－② より　　$p^3-p^2-2p=0$　　　よって　　$p(p+1)(p-2)=0$

ゆえに　　$p=0$，-1，2

[1]　$p=0$ のとき

　② は　　$a=0$

　これは a が正の定数であることを満たさない。

[2]　$p=-1$ のとき

　② は　　$(-1)^2+4(-1)+a=0$　　　すなわち　　$a=3$

　これは $a>0$ を満たす。

　このとき，

$$x^3+2x+a=x^3+2x+3=(x+1)(x^2-x+3)$$
$$x^2+4x+a=x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

　であるから，確かに共通解 -1 をもつ。

[3]　$p=2$ のとき

　② は　　$2^2+4\cdot2+a=0$　　　すなわち　　$a=-12$

　これは a が正の定数であることを満たさない。

よって　　$a={}^{\text{ア}}3$，共通解は ${}^{\text{イ}}-1$

17．［名城大］

(1)　$x=0$ は解でないから，(*) の両辺を x^2 で割ると

$$x^2+2x+a+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ であるから，① は　　$t^2-2+2t+a=0$

よって　　$t^2+2t+a-2=0$　…… ②

(2)　$a=3$ のとき，② は　　$t^2+2t+1=0$　　　よって　　$t=-1$

ゆえに　　$x+\frac{1}{x}=-1$　　　両辺に x を掛けて整理すると　　$x^2+x+1=0$

よって　　$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

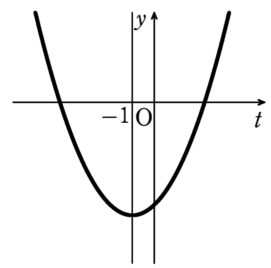
(3)　(*) が異なる 4 個の実数解をもつためには，② が異なる 2 個の実数解をもたなければならない。その解を t_1，t_2 とすると，$x+\frac{1}{x}=t_1$，$x+\frac{1}{x}=t_2$ がそれぞれ異なる 2 個の実数解をもつことが求める条件である。

$x+\frac{1}{x}=t$ の両辺に x を掛けて整理すると　　$x^2-tx+1=0$

これが 2 個の実数解をもつから，この判別式 D について　　$D=t^2-4>0$

ゆえに　　$t<-2$，$2<t$

したがって，② が $t<-2$，$2<t$ で異なる 2 つの実数解をもつ条件を求めればよい。



$f(t)=t^2+2t+a-2$ とおくと

$$f(t)=(t+1)^2+a-3$$

$y=f(t)$ のグラフの軸は $t=-1$ であるから，求める条件は

$$f(2)<0$$

よって　　$2^2+2\cdot2+a-2<0$　すなわち　$a<-6$

18．［福岡教育大］

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2$

　$-2abxy-2bcyz-2cazx$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+c^2x^2-2cazx+a^2z^2$

$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0$

よって，$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つ。

(2)　(1) の不等式で $a=b=c=1$ とおくと

$$3(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+z)^2=1$$

よって　　$x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{1}{3}$

等号が成り立つのは，$y=x$ かつ $z=y$ かつ $x=z$　すなわち　$x=y=z$　のとき。

このとき，$x+y+z=1$ から　　$x=y=z=\frac{1}{3}$

したがって，$x^2+y^2+z^2$ は $x=y=z=\frac{1}{3}$ のとき最小値 $\frac{1}{3}$ をとる。