(下書き)

$d>0$ のとき、$\{a_n\}$: $a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4, \cdots$

正の数 d を足していくと、ある項 a_k で必ず正となり、
それ以降は、ずっと正の数が続く。つまり、和の値は、
いくらでも大きくできるので、$\{S_n\}$ の最大値は存在しない。

$d=0$ のとき、$\{a_n\}$: $a_1 \xrightarrow{+0} a_2 \xrightarrow{+0} a_3 \xrightarrow{+0} a_4, \cdots$

$S_5=30$ より、$5a_1=30$ $\therefore a_1=6$
よって、すべての n で、$a_n=6$ となり、$\{S_n\}$ の最大値は存在しない。

$d<0$ のとき、シナリオは以下のようになってほしい。
もし、a_1 から a_5 までが正，a_6 以降から負ならば、

$\{a_n\}$: $\underbrace{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}_{\text{⊕ ここだけ足せば和は最大}} \,\Big|\, \underbrace{a_6, a_7, a_8, \cdots}_{\text{⊖ 1つでも足すと和の値は、小さくなる。}}$

注意したいのは、途中、0がある場合である。

	a_4	a_5	a_6	a_7	
1.	+	+	−	−	⇒ $n=5$ で最大 $(\cdots<S_4<S_5>S_6>\cdots)$
2.	+	+	0	−	⇒ $n=5, 6$ で最大 $(\cdots<S_4<S_5=S_6>S_7>\cdots)$
3.	+	0	−	−	⇒ $n=4, 5$ で最大 $(\cdots<S_4=S_5>S_6>\cdots)$

$\{S_n\}$ の最大値は S_5 なので、上の1〜3は、
この条件をみたしている。
つまり、$1 \leqq n \leqq 5$ のとき、$a_n \geqq 0$
$n \geqq 6$ のとき、$a_n \leqq 0$
等号を入れてもOK

11-2 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ について、初項から第 n 項までの和を S_n とする。数列 $\{S_n\}$ の最大値が $S_5=30$ であるとき、a_3 を求めよ。また、d の範囲を求めよ。

$S_5=30$ より、

$a_1+a_5=a_1+(a_1+4d)$

$$\frac{1}{2}\cdot 5(2a_1+4d)=30$$

$$a_1+2d=6 \quad \cdots ①$$

$$\therefore \underline{a_3=6}_{//}$$

$d>0$ のとき、$\{S_n\}$ の最大値は存在しないので、不適

$d=0$ のとき、$S_5=30$ より、$5a_1=30$ $\therefore a_1=6$
このとき、すべての n で、$a_n=6$ となり、
$\{S_n\}$ の最大値は存在しないので、不適

$\{S_n\}$ が $n=5$ で最大値をとるための条件は

$$\begin{cases} d<0 \\ a_5=a_1+4d \geqq 0 & \cdots ② \\ a_6=a_1+5d \leqq 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

② より、$6-2d+4d \geqq 0$ $(\because ①)$
$\therefore d \geqq -3$

③ より、$6-2d+5d \leqq 0$
$\therefore d \leqq -2$ $(\because ①)$

よって、
$\underline{-3 \leqq d \leqq -2}_{//}$ ($d<0$ をみたす)