軌跡と通過領域　演習プリント

1．[関西大　(中点の軌跡)]

$y=(x-2)^2$ と $y=mx$ から y を消去して　$(x-2)^2=mx$

すなわち　$x^2-(m+4)x+4=0$

この 2 次方程式の判別式を D とする。

放物線 $y=(x-2)^2$ と直線 $y=mx$ が異なる 2 つの共有点をもつ条件は　$D>0$

よって　$(m+4)^2-4^2>0$　すなわち　$(m+8)m>0$

ゆえに　${}^{ア}m<-8,\ 0<m$

また，2 つの共有点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とおく。

α，β は 2 次方程式 $x^2-(m+4)x+4=0$ の 2 つの実数解であるから

$\alpha+\beta=m+4,\quad \alpha\beta=4$

2 点 P，Q の座標は $(\alpha,\ m\alpha)$，$(\beta,\ m\beta)$ と表されるから，線分 PQ の中点の座標を

$(X,\ Y)$ とおくと　$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　すなわち　$X=\dfrac{m+4}{2}$

よって　$m=2(X-2)$

また，線分 PQ の中点は直線 $y=mx$ 上にあるから　$Y=mX$

ゆえに　$Y=2(X-2)\cdot X=2X^2-4X$

また，$m<-8,\ 0<m$ であるから　$2(X-2)<-8,\ 0<2(X-2)$

これを解くと　$X<-2,\ 2<X$

したがって，線分 PQ の中点の軌跡は，放物線 ${}^{イ}y=2x^2-4x$ の ${}^{ウ}x<-2,\ 2<x$ の範囲の部分である。

2．[広島大　(重心の軌跡)]

(1)　P$(x,\ y)$ は円 C 上の点で，3 点 O, A, P が三角形を作るから

$x^2+y^2=1,\ y\neq 0$ …… ①

また，G$(X,\ Y)$ は △OAP の重心であるから　$X=\dfrac{1}{3}(x+1)$，$Y=\dfrac{1}{3}y$ …… ②

①，② から x, y を消去すると　$(3X-1)^2+(3Y)^2=1$，$Y\neq 0$

よって　$\left(X-\dfrac{1}{3}\right)^2+Y^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$，$Y\neq 0$　ゆえに，G の軌跡は，

中心 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{3}$ の円．ただし，原点と点 $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ を除く．

(2)　② から　$G_0\left(\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right),\ \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\right)$　すなわち　$G_0\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

(1) で求めた円の中心を B とすると，直線 G_0B の傾きは　$\dfrac{1}{6}\div\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，G_0 における接線の傾きは　$-\sqrt{3}$

ゆえに，G_0 における接線の方程式は　$y-\dfrac{1}{6}=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}+2}{6}\right)$

よって，これと x 軸との交点の x 座標は

$-\dfrac{1}{6}=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}+2}{6}\right)$ から　$x=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{9}$

したがって，求める座標は　$\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{9},\ 0\right)$

3．[福岡教育大　(交点の軌跡)]

ℓ と ℓ' の交点の座標を $(X,\ Y)$ とおく。

$x=X,\ y=Y$ は連立方程式 ①，② の解であるから

$(t+1)X+Y-t-2=0,\quad (2t+1)X+(t+3)Y-4t-3=0$

すなわち　$(X-1)t+X+Y-2=0$ …… ③

$(2X+Y-4)t+X+3Y-3=0$ …… ④

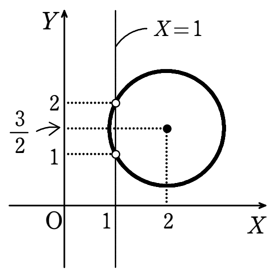
[1]　$X\neq 1$ のとき，④ から　$t=-\dfrac{X+Y-2}{X-1}$

これを ⑤ に代入すると　$(2X+Y-4)\cdot\left(-\dfrac{X+Y-2}{X-1}\right)+X+3Y-3=0$

整理すると　$X^2+Y^2-4X-3Y+5=0$

すなわち　$(X-2)^2+\left(Y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$ …… ⑤

ただし，$X=1$ となる ⑥ 上の点 $(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ は除く。



[2]　$X=1$ のとき，③ から　$Y=1$

$X=1$，$Y=1$ を ④ に代入すると　$-t+1=0$

これを解くと　$t=1$

ゆえに，点 $(1,\ 1)$ は ℓ と ℓ' の交点である。

以上から，求める軌跡は　円 $(x-2)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$　ただし，点 $(1,\ 2)$ を除く。

4．[名古屋市立大　(軌跡と実数条件)]

$u=x+y$，$v=xy$ とおく．

$x^2+y^2=1$ から　$(x+y)^2-2xy=1$

よって　$u^2-2v=1$

ゆえに　$v=\dfrac{1}{2}u^2-\dfrac{1}{2}$ …… ①

一方，x，y は 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ …… ② の 2 つの解であり，x，y が実数であるから，u，v も実数となる．

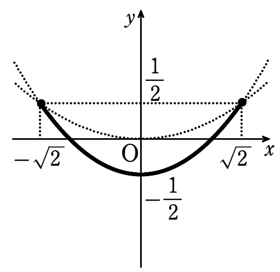
方程式 ② の判別式を D とすると　$D\geqq 0$

よって　$D=u^2-4v\geqq 0$ …… ③

①，③ から，求める軌跡は　放物線 $v=\dfrac{1}{2}u^2-\dfrac{1}{2}$ の

$-\sqrt{2}\leqq u\leqq\sqrt{2}$ の部分である．

すなわち，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ の $-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の部分で，右の図のようになる．



5．[東北学院大　(一定を保つ軌跡(反転))]

(1)　OP·OQ$=1$ から　$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{X^2+Y^2}=1$ …… ①

①より，$(x,y)\neq(0,0)$ かつ　$(X,Y)\neq(0,0)$

3 点 O，P，Q は同一直線上より，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$ $(k>0)$ と表せる。

よって，$(x,y)=k(X,Y)=(kX,kY)$ となり，これを①に代入すると，

$\sqrt{k^2(X^2+Y^2)}\sqrt{X^2+Y^2}=1$，つまり，$k(X^2+Y^2)=1$

$(X,Y)\neq(0,0)$ より，$k=\dfrac{1}{X^2+Y^2}$

よって，$(x,y)=(kX,kY)$ より，$x=\dfrac{X}{X^2+Y^2}$，$y=\dfrac{Y}{X^2+Y^2}$

(2)　$3x+4y=5$ から　$\dfrac{3X}{X^2+Y^2}+\dfrac{4Y}{X^2+Y^2}=5$

よって　$X^2-\dfrac{3}{5}X+Y^2-\dfrac{4}{5}Y=0$

ゆえに　$\left(X-\dfrac{3}{10}\right)^2+\left(Y-\dfrac{2}{5}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$　ただし　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$

したがって，求める軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{3}{10}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{1}{4}$　ただし，原点を除く．

【参考】(1)は単位ベクトルを利用するとラクである。（考えてみよう）

6．[関西大　(一定を保つ軌跡)]

(1)　放物線 $y=x^2$ 上の点 P$(p,\ p^2)$ における接線は x 軸に垂直でないから，その方程式は　$y=m(x-p)+p^2$　とおける。

この式と $y=x^2$ から y を消去して整理すると　$x^2-mx+mp-p^2=0$

判別式を D とすると　$D=m^2-4(mp-p^2)=(m-2p)^2$

$D=0$ であるから　$m=2p$

よって，点 P における接線の方程式は　$y=2p(x-p)+p^2$

すなわち　$y=2px-p^2$ …… ①

同様にして，点 Q$(q,\ q^2)$ における接線の方程式は　$y=2qx-q^2$ …… ②

①，② から y を消去して整理すると　$2(p-q)x=p^2-q^2$

$p\neq q$ であるから　$x=\dfrac{p+q}{2}$

これを ① に代入して　$y=2p\cdot\dfrac{p+q}{2}-p^2=pq$

したがって，交点 R の座標は　$\left(\dfrac{p+q}{2},\ pq\right)$

(2)　(1) の直線 ①，② が直交するとき　$2p\times 2q=-1$　よって　$pq=-\dfrac{1}{4}$

点 R の座標を $(X,\ Y)$ とすると　$X=\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{1}{2}\left(p-\dfrac{1}{4p}\right)$，$Y=pq=-\dfrac{1}{4}$

$X=\dfrac{1}{2}\left(p-\dfrac{1}{4p}\right)$ から　$4p^2-8Xp-1=0$

判別式を D' とすると　$\dfrac{D'}{4}=(4X)^2-4\cdot(-1)=16X^2+4>0$

よって，すべての実数 X に対して p は実数値をとる。

したがって，求める軌跡 C は　直線 $y=-\dfrac{1}{4}$

7．［横浜国立大　(通過領域)］　(2)　解の存在条件（解の配置）による解法

(1)　$y=(x-a)^2-2a^2+1$ を a について整理すると

$$a^2+2xa-x^2+y-1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

放物線 C が点 $(x,\ y)$ を通るための条件は，① を満たす実数 a が存在することである。

よって，a の 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$D\geqq 0$$

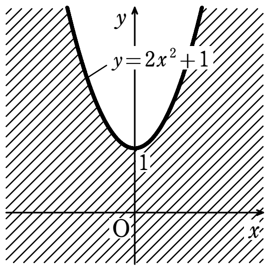
ここで

$$\frac{D}{4}=x^2-(-x^2+y-1)=2x^2-y+1$$

$D\geqq 0$ であるから　　$2x^2-y+1\geqq 0$

ゆえに　　$y\leqq 2x^2+1$

よって，C が通過する領域は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



(2)　放物線 C が点 $(x,\ y)$ を通るための条件は，① を満たす実数 a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲に存在することである。

ゆえに，a の方程式 ① の 2 つの実数解のうち，少なくとも 1 つが $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲にあればよい。

ここで，$f(a)=a^2+2xa-x^2+y-1$ とする。

[1]　2 つの解がともに $-1<a<1$ の範囲にあるための条件は，次のことが同時に成り立つことである。

$$D\geqq 0,\ f(-1)>0,\ f(1)>0,\ \text{軸について}\ -1<-x<1$$

$D\geqq 0$ から　　$y\leqq 2x^2+1$

$f(-1)>0$ から　　$1-2x-x^2+y-1>0$

よって　　$y>x^2+2x$

$f(1)>0$ から　　$1+2x-x^2+y-1>0$

よって　　$y>x^2-2x$

$-1<-x<1$ から　　$-1<x<1$

[2]　解の 1 つが $a=-1$ のとき

$f(-1)=0$ から　　$y=x^2+2x$

[3]　解の 1 つが $a=1$ のとき

$f(1)=0$ から　　$y=x^2-2x$

[4]　解の 1 つが $-1<a<1$ の範囲にあり，他の解が $a<-1$ または $1<a$ の範囲にあるための条件は

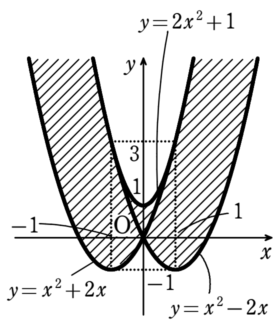
$$f(-1)f(1)<0$$

ゆえに　　$(y-x^2-2x)(y-x^2+2x)<0$

よって

$$\begin{cases} y>x^2+2x \\ y<x^2-2x \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y<x^2+2x \\ y>x^2-2x \end{cases}$$

[1]～[4] より，C が通過する領域は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



8．［横浜国立大　(通過領域)］　(3)　ファクシミリの原理による解法

(1)　円 C の半径は 2 である。

また，C と D の中心間の距離は　　$\sqrt{(a-0)^2+\{0-(-2)\}^2}=\sqrt{a^2+4}$

C と D が異なる 2 点で交わるための条件は　　$2-1<\sqrt{a^2+4}<2+1$

各辺を 2 乗して　　$1<a^2+4<9$　　　　よって　　$-3<a^2<5$

$a^2\geqq 0$ であるから　　$0\leqq a^2<5$

これを満たす a の値の範囲は　　$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$

(2)　円 C の方程式は　　$x^2+(y+2)^2=4$　$\cdots\cdots ①$

　円 D の方程式は　　$(x-a)^2+y^2=1$　$\cdots\cdots ②$

① − ② から　　$2ax-a^2+4y+4=3$

すなわち　　$2ax+4y-a^2+1=0$　$\cdots\cdots ③$

C と D の 2 つの交点の座標は，①，② を満たすから，③ も満たす。

したがって，③ が求める直線の方程式である。

(3)　③ を変形すると　　$y=\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{2}xa-\dfrac{1}{4}$

よって　　$y=\dfrac{1}{4}(a-x)^2-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}$

x を固定して，a を $-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ の範囲で変化させたときの y のとりうる値の範囲を調べる。$y=f(a)=\dfrac{1}{4}(a-x)^2-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}$ とおく。

[1]　$x\leqq -\sqrt{5}$ のとき　　$f(-\sqrt{5})<f(a)<f(\sqrt{5})$

　よって　　$\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$

[2]　$-\sqrt{5}<x<0$ のとき　　$f(x)\leqq f(a)<f(\sqrt{5})$

　よって　　$-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}\leqq y<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$

[3]　$0\leqq x<\sqrt{5}$ のとき　　$f(x)\leqq f(a)<f(-\sqrt{5})$

　よって　　$-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}\leqq y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$

[4]　$x\geqq \sqrt{5}$ のとき　　$f(\sqrt{5})<f(a)<f(-\sqrt{5})$

　よって　　$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$

[1]～[4] から，求める領域は右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線は放物線 $y=-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}$ $(-\sqrt{5}<x<\sqrt{5})$ を含み，他は含まない。