自然対数の底 e (ネイピア数)

◎ 自然対数の底 e について

ネイピア数 e の定義

① $e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$　　または　② $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

また、$e=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ も成り立つ。

$h=\frac{1}{x}$ の置き換えにより、①も②も同じだということが分かります。
また、$e=2.718\cdots$ (似てないや…)という値なので覚えておきましょう。

イメージとして、$1^{\infty}=1$ (ピッタリ 1の無限乗は 1)ですが、
$(1.000\cdots1)^{\infty}=e$　or　$(0.999\cdots99)^{-\infty}=e$ となります。

次は、e の定義から派生する重要な極限です。
必ず導けるようにしましょう。

重要な極限

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

(1 の証明)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\log e \qquad \left(\because \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\right)$$
$$=1$$

(2 の証明)

$\log(1+x)=t$ とおくと、
$x\to 0$ のとき、$t\to 0$ となる。
また、$1+x=e^{t}$ より、$x=e^{t}-1$

よって、$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$　より、

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^{t}-1}=1 \iff \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{e^{t}-1}{t}}=1$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1$$

(別解)　【微分係数の定義を利用】

$f(x)=e^{x}$ とおくと、$f'(x)=e^{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{0}}{x-0}=f'(0)=e^{0}=1$$