図形と方程式　演習プリント　解答

1．［名城大］

直線 ℓ に関して点 A と対称な点を $C(a,\ b)$ とすると　$a \neq 1$

線分 AC の中点は直線 ℓ 上にあるから　$\dfrac{-2+b}{2}=\dfrac{1+a}{2}$

よって　$a-b=-3$　……①

また，AC⊥ℓ であるから　$\dfrac{b+2}{a-1}\cdot 1=-1$

ゆえに　$a+b=-1$　……②

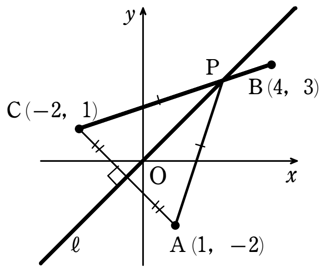
①，② から　$a=-2,\ b=1$

よって，直線 ℓ に関して点 A と対称な点の座標は　$^{\text{ア}}(-2,\ 1)$

2 点 A，B は直線 ℓ に関して同じ側にある。

ゆえに　AP＋BP＝CP＋PB≧CB

よって，点 P が線分 CB 上にあるとき，AP＋BP は最小となる。



直線 CB の方程式は

$$y-1=\frac{3-1}{4-(-2)}\{x-(-2)\}$$

すなわち　$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$

$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$，$y=x$ を連立して解くと　$x=\dfrac{5}{2}$，$y=\dfrac{5}{2}$

ゆえに，求める点 P の座標は　$^{\text{イ}}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

2．［近畿大］

① を k について整理すると

$k(x+4y-2)-2x+3y+15=0$　……(A)

この等式が k の値に関係なく成り立つための条件は

$x+4y-2=0$，$-2x+3y+15=0$

この連立方程式を解いて　$x=6$，$y=-1$

よって，直線 ① は k の値に関係なく定点 $A(^{\text{ア}}6,\ ^{\text{イ}}-1)$ を通る。

(1)　① と ② が直交するための条件は　$(k-2)\cdot 1+(4k+3)\cdot 2=0$

ゆえに　$9k+4=0$　　よって　$k=\dfrac{^{\text{ウ}}-4}{^{\text{エ}}9}$

この値を (A) に代入して　$-\dfrac{4}{9}(x+4y-2)-2x+3y+15=0$

整理すると　$2x-y-13=0$　……③

② と ③ を連立して解くと　$x=\dfrac{^{\text{オ}}23}{^{\text{カ}}5}$

(2)　$\dfrac{|6+2\cdot(-1)+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{5}}=\dfrac{^{\text{キ}}7\sqrt{^{\text{ク}}5}}{^{\text{ケ}}5}$

(3)　① と ② が平行となるための条件は　$(k-2)\cdot 2-(4k+3)\cdot 1=0$

ゆえに　$-2k-7=0$　　よって　$k=\dfrac{^{\text{コ}}-7}{^{\text{サ}}2}$

3．［立命館大］

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は　$x_1x+y_1y=25$

これが点 $(7,\ 1)$ を通るから　$7x_1+y_1=25$

よって　$y_1=25-7x_1$　……①

また，点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上にあるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=25$　……②

① を ② に代入して　$x_1{}^2+(25-7x_1)^2=25$

整理すると　$x_1{}^2-7x_1+12=0$　　ゆえに　$x_1=3,\ 4$

① から　$x_1=3$ のとき　$y_1=4$，　$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

したがって，接線の方程式は　$^{\text{ア}}3x+{}^{\text{イ}}4y=25$，$^{\text{ウ}}4x-{}^{\text{エ}}3y=25$

接点の座標は　$^{\text{オ}}(3,\ 4)$，$^{\text{カ}}(4,\ -3)$

2 本の接線は直交するので，点 $(7,\ 1)$ は 2 点 $(3,\ 4)$，$(4,\ -3)$ を直径の両端とする円周上にある。

よって，2 つの接点と点 $(7,\ 1)$ を通る円の方程式は

$(x-3)(x-4)+(y-4)(y+3)=0$

すなわち　$x^2-7x+y^2-y=0$　　整理すると　$\left(x-\dfrac{^{\text{キ}}7}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{^{\text{ク}}1}{2}\right)^2=\dfrac{^{\text{ケ}}25}{2}$

4．［大阪経済大］

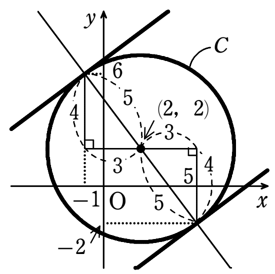
(1)　円 C の方程式を変形すると　$(x-2)^2+(y-2)^2=25$

よって，C の中心は　$(^{\text{ア}}2,\ ^{\text{イ}}2)$，半径は　$^{\text{ウ}}5$

(2)　求める接線の接点は，点 $(2,\ 2)$ を通り，傾き $-\dfrac{4}{3}$ の直線と円 C との交点である。

点 $(2,\ 2)$ と接点との距離は 5 であるから，接点の座標は　$(2-3,\ 2+4)$ と $(2+3,\ 2-4)$

すなわち　$(-1,\ 6)$ と $(5,\ -2)$



接点の座標が $(-1,\ 6)$ のとき，接線の方程式は

$y-6=\dfrac{3}{4}\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{^{\text{エ}}27}{^{\text{オ}}4}$

接点の座標が $(5,\ -2)$ のとき，接線の方程式は

$y-(-2)=\dfrac{3}{4}(x-5)$　すなわち　$y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{^{\text{カ}}23}{^{\text{キ}}4}$

(3)　円 C の中心と直線 ℓ との距離を d とすると

$$d=\frac{|2-2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，C が ℓ から切り取る線分の長さは，三平方の定理により

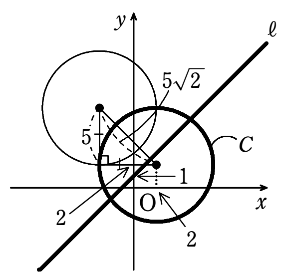
$$2\sqrt{5^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2\sqrt{\frac{50-1}{2}}={}^{\text{ク}}7\sqrt{^{\text{ケ}}2}$$

(4)　平行移動した円の中心は

$(2-5,\ 2+5)$　すなわち　$(-3,\ 7)$

よって，方程式は

$(x+{}^{\text{コ}}3)^2+(y-{}^{\text{サ}}7)^2=5^2$



円の中心が移動した距離は

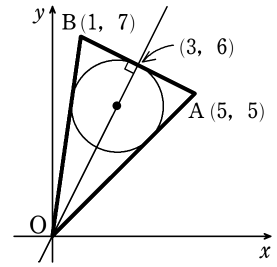
$\sqrt{(-5)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

移動した円の中心と直線 ℓ との距離は

$5\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

円の半径は 5 であるから，円周上の点と ℓ 上の点との距離の最小値は　$\dfrac{^{\text{シ}}9\sqrt{^{\text{ス}}2}}{^{\text{セ}}2}-{}^{\text{ソ}}5$

5．［立命館大］



(1)　$OA=\sqrt{5^2+5^2}={}^{\text{ア}}5\sqrt{2}$，

$OB=\sqrt{1^2+7^2}={}^{\text{イ}}5\sqrt{2}$

OA＝OB であるから，∠BOA の二等分線は，線分 AB の中点 $(3,\ 6)$ を通る。

よって，その方程式は　$y={}^{\text{ウ}}2x$

$AB=\sqrt{(1-5)^2+(7-5)^2}=2\sqrt{5}$ であるから，

△OAB の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3^2+6^2}={}^{\text{エ}}15$

△OAB の内接円の半径を r とすると

$\dfrac{1}{2}(5\sqrt{2}+2\sqrt{5}+5\sqrt{2})r=15$

ゆえに　$r=\dfrac{15}{5\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{^{\text{オ}}5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$

△OAB の内心は直線 $y=2x$ 上にあるから，内心の x 座標は

$3-\dfrac{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{10-\sqrt{10}}{3}$

よって，内心の座標は　$\left(\dfrac{^{\text{カ}}10-\sqrt{10}}{3},\ \dfrac{^{\text{キ}}20-2\sqrt{10}}{3}\right)$

(2)　辺 OA の中点の座標は $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$ であり，直線 OA の傾きは 1 であるから，辺 OA の垂直二等分線の方程式は

$y-\dfrac{5}{2}=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$　すなわち　$y={}^{\text{ク}}-x+5$

直線 $y=2x$ は辺 AB の垂直二等分線でもあるから，△OAB の外心は，2 直線 $y=2x$，$y=-x+5$ の交点である。

$y=2x$，$y=-x+5$ を連立して解くと　$x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{10}{3}$

ゆえに，外心の座標は　$\left(\dfrac{^{\text{ケ}}5}{3},\ \dfrac{^{\text{コ}}10}{3}\right)$

(3)　B を通り，直線 OA に垂直な直線の方程式は

$y-7=-(x-1)$　すなわち　$y=-x+8$

$y=2x$，$y=-x+8$ を連立して解くと　$x=\dfrac{8}{3}$，$y=\dfrac{16}{3}$

よって，垂心の座標は　$\left(\dfrac{^{\text{サ}}8}{3},\ \dfrac{^{\text{シ}}16}{3}\right)$

6．［名城大］

(1) $a>0$ であるから，円 K_1 の中心 A$(a,\ 2)$ は第1象限にあり，x 軸に接するから，半径は2である。

(2) 直線 ℓ と円 K_1 の中心 A の距離が円の半径2に等しいから

$$\frac{|3a-4\cdot2+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2 \quad \text{すなわち} \quad |3a+1|=10$$

$a>0$ であるから　$3a+1=10$　　したがって　$a=3$

(3) $a=3$ のとき　A$(3,\ 2)$

よって，C$(3,\ 0)$ である。

ℓ の方程式に $y=0$ を代入すると　$x=-3$

よって　B$(-3,\ 0)$

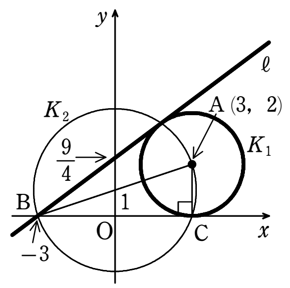
$\angle\mathrm{BCA}=90^\circ$ であるから，3点 A，B，C を通る円は，線分 AB を直径とする円である。

中心の座標は，線分 AB の中点の座標を求めて

$(0,\ 1)$

半径は点 $(0,\ 1)$ と点 B の距離を求めて　$\sqrt{10}$

よって，円 K_2 の方程式は　$x^2+(y-1)^2=10$



(4) K_1 の方程式は　$(x-3)^2+(y-2)^2=4$

k を定数として，次の方程式を考える。

$$k\{x^2+(y-1)^2-10\}+(x-3)^2+(y-2)^2-4=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

$(*)$ は，(3) で求めた K_2 と K_1 の2つの交点を通る図形を表す。

図形 $(*)$ が原点を通るとして，$(*)$ に $x=0$，$y=0$ を代入すると

$-9k+9=0$　すなわち　$k=1$

$(*)$ に代入して整理すると　$x^2+y^2-3x-3y=0$

これが求める円 K_3 の方程式である。

注意　求めた円 K_3 の方程式を変形すると　$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$

7．［中央大］

円 C の中心を A とすると　A$(a,\ 0)$

また，円 C の半径は1である。

(1) 直線 L_1 と点 A の距離は　$|a|$

直線 L_2 と点 A の距離は　$\frac{|a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}$

円 C と直線 L_1 が共有点をもつための条件は

$|a|\leqq1$　　すなわち　$-1\leqq a\leqq1$　……①

円 C と直線 L_2 が共有点をもつための条件は

$\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}\leqq1$　すなわち　$|a-1|\leqq\sqrt{2}$

よって　$1-\sqrt{2}\leqq a\leqq1+\sqrt{2}$　……②

求める a の値の範囲は，①，②の共通範囲を求めて

$1-\sqrt{2}\leqq a\leqq1$　……③

(2) 直線 L_1 と円 C の共有点の1つを B とすると

$l_1=2\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{OA}^2}=2\sqrt{1^2-|a|^2}$

$=2\sqrt{1-a^2}$

なお，③から，$1-a^2\geqq0$ である。

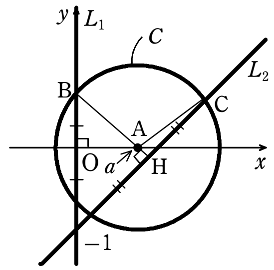
また，直線 L_2 と円 C の共有点の1つを C とし，A から直線 L_2 に下ろした垂線の足を H とすると

$$l_2=2\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AH}^2}=2\sqrt{1^2-\left(\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2^2\cdot\frac{2-(a-1)^2}{2}}=\sqrt{2(-a^2+2a+1)}$$

$-a^2+2a+1\geqq0$ を解くと　$1-\sqrt{2}\leqq a\leqq1+\sqrt{2}$

ゆえに，③の範囲において　$-a^2+2a+1\geqq0$



(3) $l_1{}^2+l_2{}^2=4(1-a^2)+2(-a^2+2a+1)=-6a^2+4a+6=-6\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{20}{3}$

(1) の③の範囲において，$l_1{}^2+l_2{}^2$ は $a=\frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{20}{3}$ をとる。

8．［慶応義塾大］

円 C_1 の方程式を変形すると　$(x-3)^2+(y+6)^2=20$

ゆえに，円 C_1 の中心は A$(3,\ -6)$，半径は $2\sqrt{5}$ である。

O を原点とし，円 C_2 の半径を r とする。

円 C_2 は円 C_1 に外接するから　$r+2\sqrt{5}=\mathrm{OA}$

よって　$r=\sqrt{3^2+(-6)^2}-2\sqrt{5}=$ ア$\sqrt{5}$

2円 C_1，C_2 の接点を T とすると，T は線分 OA を $r:2\sqrt{5}=1:2$ に内分するから，求める共有点 T の座標は　イ$(1,\ -2)$

9．［近畿大］

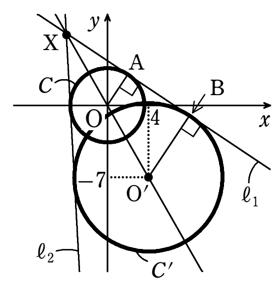
円 C' の方程式を変形すると

$(x-4)^2+(y+7)^2=52$

円 C と円 C' を図示すると，右の図のようになり，2つの円は異なる2点で交わる。

また，C と ℓ_1 の接点を A，C' と ℓ_1 の接点を B とし，C の中心を O，C' の中心を O′ とする。

また，ℓ_1 と ℓ_2 の交点を X とすると，X は2点 O，O′ を通る直線上にある。



△XOA∽△XO′B であり，

$\mathrm{OA}=\sqrt{13}$，$\mathrm{O'B}=2\sqrt{13}$

であるから，その相似比は　$1:2$

よって，点 X は，原点 O に関して点 O′ と対称な点であるから，その座標は

(ア-4，イ7)

共通接線は x 軸に垂直でないから，点 X を通る直線の傾きを m とすると，その方程式は　$y-7=m(x+4)$

すなわち　$mx-y+4m+7=0$　……①

直線①と点 O の距離は円 C の半径 $\sqrt{13}$ に等しいから

$$\frac{|4m+7|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{13}$$

ゆえに　$|4m+7|=\sqrt{13(m^2+1)}$

両辺は負でないから2乗しても同値である。

よって　$(4m+7)^2=13(m^2+1)$　　整理して　$3m^2+56m+36=0$

ゆえに　$(m+18)(3m+2)=0$　　よって　$m=-18,\ -\frac{2}{3}$

①から，$m=-18$ のとき　$-18x-y-65=0$

$m=-\frac{2}{3}$ のとき　$-\frac{2}{3}x-y+\frac{13}{3}=0$

したがって，共通接線の方程式は

ℓ_1：ウ$2x+$エ$3y=13$，ℓ_2：オ$18x+y=$カ-65

10．［東北工業大］

$y=x^2+(2k-10)x-4k+16$ ……① とする。

(1) $k=0$ のとき，①は　$y=x^2-10x+16$　　変形すると　$y=(x-5)^2-9$

よって，頂点の座標は　$(5,\ -9)$

(2) 2つの共有点の x 座標は2次方程式 $x^2+(2k-10)x-4k+16=0$ の2解である。

この方程式を解くと　$(x-2)(x+2k-8)=0$

よって　$x=2,\ 8-2k$

2つの共有点の間の距離が8であるから　$|2-(8-2k)|=8$

よって　$|2k-6|=8$　　これを解くと　$k=7,\ -1$

$k\geqq0$ であるから　$k=7$

(3) ①を変形すると　$y=(x+k-5)^2-k^2+6k-9$

よって，①の頂点の座標は　$(-k+5,\ -k^2+6k-9)$

$-k+5=x$，$-k^2+6k-9=y$ とおいて，k を消去すると

$y=-x^2+4x-4$　　また，$k=5-x\geqq0$ から　$x\leqq5$

したがって，求める軌跡は，放物線 $y=-(x-2)^2$ $(x\leqq5)$

11. ［龍谷大］

(1)　ℓ の方程式は　　$y=a(x+1)$

ℓ と放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ が異なる 2 点で交わっているから

$$\frac{1}{2}x^2=a(x+1)\quad \text{すなわち}\quad x^2-2ax-2a=0$$

の判別式 D について　$D>0$

ゆえに　$\dfrac{D}{4}=a^2+2a>0$　　　よって　　$a<-2,\ 0<a$

(2)　$\mathrm{P}(p,\ a(p+1))$，$\mathrm{Q}(q,\ a(q+1))$ とすると，R の座標は

$$\left(\frac{p+q}{2},\ a\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\right)$$

解と係数の関係により　$p+q=2a$ であるから

R の x 座標は　　$\dfrac{p+q}{2}=a$

R の y 座標は　　$a\left(\dfrac{p+q}{2}+1\right)=a(a+1)=a^2+a$

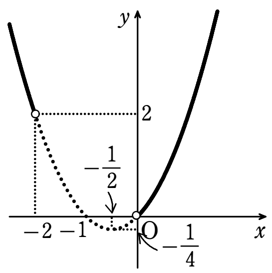
よって　　$\mathrm{R}(a,\ a^2+a)$

(3)　$\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると　　$x=a,\ y=a^2+a$

a を消去すると　　$y=x^2+x$

ここで，(1) から　　$x<-2,\ 0<x$

よって，点 R の軌跡は右の図のようになる。



12. ［福島大］

(1)　$(a-1)(x+1)-(a+1)y=0$ を a について整理すると

$$a(x-y+1)-(x+y+1)=0$$

この等式が a の値に関係なく成り立つための条件は　　$x-y+1=0,\ x+y+1=0$

この連立方程式を解いて　　$x=-1,\ y=0$

よって，求める定点の座標は　　$(-1,\ 0)$

(2)　$\ell_1：a(x-y+1)-(x+y+1)=0$　……①

$\ell_2：ax-y-1=0$　　　　　　　……② とおく。

2 直線 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$x,\ y$ は①，② を同時に満たす。

[1]　$x\neq 0$ のとき

② から　　$a=\dfrac{y+1}{x}$

① に代入して　　$\dfrac{y+1}{x}(x-y+1)-(x+y+1)=0$

分母を払って整理すると　　$x^2+y^2=1$　……③

③ において，$x=0$ とすると　　$y=1,\ -1$

ゆえに，$x\neq 0$ のとき，点 P は円 ③ から 2 点 $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$ を除いた図形上にある。

[2]　$x=0$ のとき

② から　　$y=-1$

$x=0,\ y=-1$ を ① に代入すると　　$a=0$

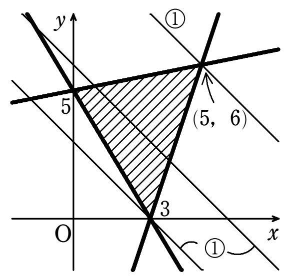
よって，$(0,\ -1)$ は $a=0$ のときの 2 直線の交点である。

以上から，求める軌跡は

円 $x^2+y^2=1$　ただし，点 $(0,\ 1)$ を除く。

13. ［関西学院大］

与えられた連立不等式の表す領域を D とすると，領域 D は，3 点 $(3,\ 0)$，$(5,\ 6)$，$(0,\ 5)$ を頂点とする三角形の周および内部である。



(前半)　$x+y=k$ ……① とおくと，これは傾き -1，y 切片 k の直線を表す。

この直線 ① が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

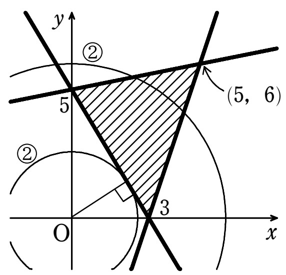
図から，k の値は，直線 ① が点 $(5,\ 6)$ を通るとき最大になり，点 $(3,\ 0)$ を通るとき最小になる。

よって，$x+y$ は

$x=5,\ y=6$ のとき最大値 $5+6={}^{\text{イ}}11$；

$x=3,\ y=0$ のとき最小値 $3+0={}^{\text{ア}}3$　をとる。

(後半)　$x^2+y^2=k$ ……②



とおくと，$k>0$ のとき，② は中心 $(0,\ 0)$，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

k が最小，すなわち円 ② の半径が最小となるのは，図から，円 ② が直線 $y=-\dfrac{5}{3}x+5$ ……③ と接するときである。

このときの接点の座標を求める。

点 $(0,\ 0)$ を通り直線 ③ に垂直な直線の方程式は $y=\dfrac{3}{5}x$ であるから，この方程式と ③ を連立して解くと，接点の座標は　　$\left(\dfrac{75}{34},\ \dfrac{45}{34}\right)$

このときの k の値は　　$k=\left(\dfrac{75}{34}\right)^2+\left(\dfrac{45}{34}\right)^2=\left(\dfrac{15}{34}\right)^2(5^2+3^2)=\dfrac{225}{34}$

したがって，x^2+y^2 は $x={}^{\text{エ}}\dfrac{75}{34}$，$y={}^{\text{オ}}\dfrac{45}{34}$ のとき最小値 ${}^{\text{ウ}}\dfrac{225}{34}$ をとる。

14. ［福島大］

(1)　求める領域は，放物線 $y=-x^2+4$ の下側と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ の上側との共通部分である。

$-x^2+4=-\dfrac{1}{2}x+1$ とすると　　$2x^2-x-6=0$

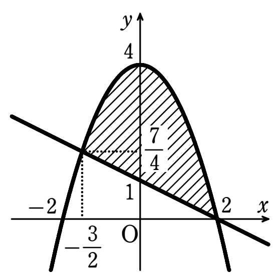
すなわち　$(x-2)(2x+3)=0$

よって　　$x=2,\ -\dfrac{3}{2}$

ゆえに，放物線と直線の交点の座標は

$(2,\ 0)$，$\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



(2)　$x+y=k$ とおくと　　$y=-x+k$　……①

① は，傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。

図から，直線 ① が放物線 $y=-x^2+4$ と接するとき，k の値は最大となる。

① と $y=-x^2+4$ から y を消去して整理すると

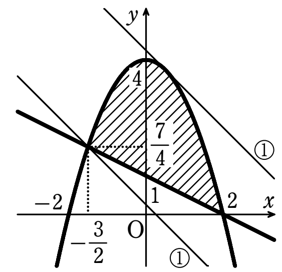
$x^2-x+k-4=0$　……②

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=(-1)^2-4(k-4)=-4k+17$

直線 ① が放物線に接するとき，$D=0$ であるから

$-4k+17=0$　　　よって　$k=\dfrac{17}{4}$



このとき，② の重解は　　$x=\dfrac{1}{2\cdot 1}=\dfrac{1}{2}$　　　① から　　$y=-\dfrac{1}{2}+k=\dfrac{15}{4}$

よって　　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{15}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{17}{4}$

また，図から，直線 ① が点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$ を通るとき，k の値は最小になる。

このとき　　$k=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{4}=\dfrac{1}{4}$

よって　　$x=-\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{7}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$