5-3 m を正の実数とする。xy 平面上の点 A(2, 0) から直線 $y=mx$ へ下ろした垂線の足を A′ とし、x 軸に関して A′ と対称な点を P とする。また、点 B(0, 1) から直線 $y=mx$ へ下ろした垂線の足を B′ とし、y 軸に関して B′ と対称な点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P, Q のそれぞれの座標を求めよ。

(2) 線分 PQ を 2 : 1 に内分する点を R とするとき、R の座標を求めよ。

(3) m の値がすべての正の実数を変化するとき、R の軌跡を求め、それを図示せよ。

(1) 直線AA′の方程式は、$y=-\frac{1}{m}(x-2)$

よって

$$\begin{cases} y=mx \\ y=-\frac{1}{m}(x-2) \end{cases}$$ より、$x=\frac{2}{m^2+1}$, $y=\frac{2m}{m^2+1}$

$\therefore A'\left(\frac{2}{m^2+1}, \frac{2m}{m^2+1}\right)$

$\therefore P\left(\frac{2}{m^2+1}, -\frac{2m}{m^2+1}\right)$ //

また、直線BB′の方程式は、$y=-\frac{1}{m}x+1$

よって、

$$\begin{cases} y=mx \\ y=-\frac{1}{m}x+1 \end{cases}$$ より、$x=\frac{m}{m^2+1}$, $y=\frac{m^2}{m^2+1}$

$\therefore B'\left(\frac{m}{m^2+1}, \frac{m^2}{m^2+1}\right)$

$\therefore Q\left(-\frac{m}{m^2+1}, \frac{m^2}{m^2+1}\right)$ //

(2) R(X, Y) とすると、

$$X=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{m^2+1}-\frac{2m}{m^2+1}\right)=-\frac{2(m-1)}{3(m^2+1)}$$

$$Y=\frac{1}{3}\left(\frac{-2m}{m^2+1}+\frac{2m^2}{m^2+1}\right)=\frac{2m(m-1)}{3(m^2+1)}$$

$$\therefore R\left(-\frac{2(m-1)}{3(m^2+1)}, \frac{2m(m-1)}{3(m^2+1)}\right)$$ //

6-2 座標平面上の点 (x, y) に対し $f(x, y)$, $g(x, y)$ を次で定める。

$f(x, y)=(x-3)^2+y^2-4$

$g(x, y)=\sqrt{3}x-4y$

以下の問いに答えよ。

(1) 連立不等式

$f(x, y)\leqq 0,\ g(x, y)\leqq 0$

の表す領域を D とする。D を図示せよ。

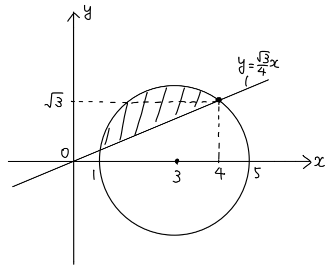
(2) 円 $f(x, y)=0$ と直線 $g(x, y)=0$ の交点において、円 $f(x, y)=0$ と接する直線の方程式を求めよ。

(3) D を(1)で定めた領域とする。点 (x, y) が領域 D 内を動くとき、$ax+y$ の最大値、最小値を求めよ。ただし、a は正の定数である。

(1) $f(x,y)\leqq 0$ より、$(x-3)^2+y^2\leqq 4$

$g(x,y)\leqq 0$ より、$y\geqq\frac{\sqrt{3}}{4}x$

領域Dは図の斜線部であり、境界を含む。



(2) (ポイント)

交点の1つが(4, √3)と分かっているので、

因数定理を利用。((x−4)を因数にもつ)

$C: (x-3)^2+y^2=4$, $\ell: y=\frac{\sqrt{3}}{4}x$ とする。

Cとℓの2式より、yを消去して、整理すると、

$19x^2-96x+80=0$　↓ ポ 頭としっぽで因数分解

$(x-4)(19x-20)=0$

よって、

Cとℓの交点は、$(4,\sqrt{3})$, $\left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right)$

点 $(4,\sqrt{3})$ における接線の方程式は、

$(4-3)(x-3)+\sqrt{3}y=4$　$\therefore x+\sqrt{3}y-7=0$

また、点 $\left(\frac{20}{19}, \frac{5\sqrt{3}}{19}\right)$ における接線の方程式は、

$\left(\frac{20}{19}-3\right)(x-3)+\frac{5\sqrt{3}}{19}y=4$　$\therefore 37x-5\sqrt{3}y-35=0$

よって、求める直線の方程式は、

$x+\sqrt{3}y-7=0$, $37x-5\sqrt{3}y-35=0$ //