ベクトルの一次独立

1、一次独立

平面上の2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$に対して

「$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow s=t=0$」が成り立つとき、
$\vec{a}$, $\vec{b}$は「一次独立」であるという。

← これが(一次独立の定義)

(つまり、$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$ をみたす実数s, tは、$s=t=0$のみ)

「この状態を$\vec{a}$, $\vec{b}$は一次独立という」

2、係数比較できる理由

平面上のベクトル$\vec{p}$が $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{p}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$ の2通りで表せると、

$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$ …(*)

$\Longleftrightarrow (s-s')\vec{a}+(t-t')\vec{b}=\vec{0}$ が成り立つ。

$\vec{a}$, $\vec{b}$が一次独立のとき、

$s-s'=0$ かつ $t-t'=0 \Longleftrightarrow s=s'$ かつ $t=t'$

$\vec{a}$, $\vec{b}$が一次独立のとき、その定義から、係数比較できる。

3、一次独立と同値なもの

$\vec{a}$, $\vec{b}$ で張られる三角形が存在($\vec{a}$, $\vec{b}$で三角形が作れる) … ①

$\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ … ②

$\Longleftrightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$は一次独立 … ③ ← ($s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow s=t=0$ が成り立つ(定義))

① $\Longleftrightarrow$ ② は明らかなので、

② $\Longleftrightarrow$ ③ を示すことにする。(② ⇒ ③ の証明は重要)

(証明) ② ⇒ ③ を示す。つまり、 重要!!

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$, $s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$ のとき、$s=t=0$を示す。

$t\neq0$ と仮定すると、$\vec{b}=-\dfrac{s}{t}\vec{a}$

よって、$\vec{a}\parallel\vec{b}$ $(s\neq0)$ または $\vec{b}=\vec{0}$ $(s=0)$ であるが、これは $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ に矛盾する。

$\therefore t=0$

ゆえに、$t=0$ であり、$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$ より、$s\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ より、$s=0$。

したがって、② ⇒ ③ は成り立つ。

次に、③ ⇒ ② を示す。

対偶：「②でない ⇒ ③でない」を示せばよい。

②でない $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{a}\parallel\vec{b}$ の少なくとも1つが成り立つ。

③でない $\Longleftrightarrow$ $s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0}$ かつ $(s,t)\neq(0,0)$ をみたす実数s, tが存在。

「$p\Rightarrow q$」の否定は、「pかつ$\bar{q}$」(pのとき、qでない)

(i) $\vec{a}=\vec{0}$ のとき、

$s=1$, $t=0$ とすると、「③でない」は、成り立つ。

(ii) $\vec{b}=\vec{0}$ のとき

$s=0$, $t=1$ とすると、「③でない」は、成り立つ。

(iii) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ のとき、

$\vec{b}=k\vec{a}$ $(k\neq0)$ とおき、$s=-k$, $t=1$ とすると、「③でない」は、成り立つ。

(i),(ii),(iii) より、「②でない ⇒ ③でない」は真より、② ⇒ ③ も真である。

以上より、② ⇔ ③ □

まとめると、$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき、$\vec{a}$, $\vec{b}$は一次独立であり、2通りで表して、係数比較ができる。