軌跡と通過領域　演習プリント

1．［関西大　(中点の軌跡)］

座標平面上において，放物線 $y=(x-2)^2$ と直線 $y=mx$ が異なる 2 つの共有点 P，Q をもつとき，定数 m のとりうる値の範囲は $^{ア}\boxed{}$ である。

さらに，m がこの範囲を動くとき，線分 PQ の中点の軌跡は方程式 $^{イ}\boxed{}$ で表される曲線の一部であり，それは x 座標が $^{ウ}\boxed{}$ の範囲の部分である。

2．［広島大　(重心の軌跡)］

xy 平面上に原点 O $(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C とその上の点 A $(1,\ 0)$ がある．

円 C 上を動く点 P に対して，3 点 O, A, P が三角形を作るとき，その三角形の重心を G とする。

(1)　G の軌跡を求めよ。

(2)　円 C 上の点 $P_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に対する三角形 OAP_0 の重心を G_0 とする。(1) で求めた軌跡の G_0 における接線が x 軸と交わる点の座標を求めよ。

3．［福岡教育大　(交点の軌跡)］

t を実数とし，x，y の 1 次方程式

$$(t+1)x+y-t-2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$(2t+1)x+(t+3)y-4t-3=0 \quad \cdots\cdots ②$$

を考える。座標平面上で ① が表す直線を ℓ，② が表す直線を ℓ' とする。

t の値が変化するとき，ℓ と ℓ' の交点の軌跡を求めよ。

4．［名古屋市立大　(軌跡と実数条件)］

実数 x，y が $x^2+y^2=1$ という関係を満たしながら動くとき，点 P$(x+y,\ xy)$ の軌跡を求め，図示せよ。

5．［東北学院大　(一定を保つ軌跡 (反転))］

座標平面上に直線 $l:3x+4y=5$ がある．l 上の点 P と原点 O を結ぶ線分上に OP·OQ$=1$ となるように点 Q をとる。

(1)　P，Q の座標をそれぞれ $(x,\ y)$，$(X,\ Y)$ とするとき，x と y をそれぞれ X と Y で表せ。

(2)　P が l 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

6．［関西大　(一定を保つ軌跡)］

(1)　放物線 $y=x^2$ 上の点 P$(p,\ p^2)$ における接線と点 Q$(q,\ q^2)$ における接線の交点 R の座標を求めよ。ただし，$p \neq q$ とする。

(2)　次の条件 (A) を満たす点の軌跡 C を求めよ。

(A)　その点から放物線 $y=x^2$ に 2 本の接線が引けて，かつそれらが互いに垂直に交わる。

7．［横浜国立大　(通過領域)］

実数 a に対し，xy 平面上の放物線 $C:y=(x-a)^2-2a^2+1$ を考える。

(1)　a がすべての実数を動くとき，C が通過する領域を求め，図示せよ。

(2)　a が $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき，C が通過する領域を求め，図示せよ。

8．［横浜国立大　(通過領域)］

xy 平面上に円 $C:x^2+(y+2)^2=4$ がある。中心 $(a,\ 0)$，半径 1 の円を D とする。C と D が異なる 2 点で交わるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　C と D の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(3)　a が (1) の範囲を動くとき，(2) の直線が通過する領域を図示せよ。